6 Modellering

Overskriftene viser til delkapitlene i boka. Først kommer et formelark for hele kapittelet. Under hver overskrift står gjennomregnede eksempler med løsning, og deretter oppgaver du skal løse uten PC. Fasiten står bakerst.

Formelark

MODELLER

Premisser
antakelsene modellen bygger på

Ekstrapolasjon
bruk utenfor gyldighetsområdet

Modelleringsprosessen
spørsmål → modell → svar → vurdering

> - Presenter svaret sammen med premissene, og sjekk om det er rimelig.

REGRESJON OG VALG AV MODELL

Modelltyper
$ax + b$ $ax^2 + bx + c$ $a \cdot b^x$ $a \cdot x^b$

Like differanser
lineær modell

Like forhold
eksponentiell modell

Avvik
målt − modell

> - Les rekkefølgen på konstantene i Python-koden.
> - Små avvik uten mønster betyr at modellen passer godt.

6.1.1 Matematiske modeller

EKSEMPEL *Finn premissene*

En taxi koster $P(x) = 50 + 15x$ kroner for x kilometer. Hvilke premisser bygger modellen på?

Løsning

Startprisen er alltid 50 kr, og hver kilometer koster det samme, uansett tid på døgnet, ventetid, kø eller antall passasjerer. I virkeligheten har mange taxier også tidstakst og helgetillegg, så modellen er en forenkling. ∎

EKSEMPEL *Ekstrapolasjon*

Høyden til en jente fra hun var 6 til 12 år kan beskrives med $h(x) = 6x + 80$ cm, der x er alderen. Bruk modellen til å finne høyden når hun er 10 år og 40 år. Kommenter svarene.

Løsning

$h(10) = 140$ cm, som er rimelig. $h(40) = 320$ cm, som er helt urimelig. Mennesker slutter å vokse i tenårene, så modellen gjelder bare i området den er laget for, omtrent $6 \leqslant x \leqslant 12$. ∎

EKSEMPEL *Vurder en påstand*

En avis skriver: «Salget av elsykler har økt med 50 % per år de siste tre årene. Fortsetter veksten, vil det om 20 år selges over 3000 ganger så mange elsykler som i dag.» Vurder påstanden.

Løsning

Regningen er riktig: $1{,}5^{20} \approx 3325$. Men modellen ekstrapolerer en eksponentiell vekst fra bare tre år til tjue år frem. Markedet blir mettet, og det er et begrenset antall mennesker som kan kjøpe sykler. Påstanden er matematisk riktig, men bygger på et urimelig premiss. ∎

6.1 En bil er verdt $V(t) = 300\,000 \cdot 0{,}85^t$ kroner etter t år.

a) Hva var bilen verdt som ny?

b) Hvor mange prosent taper den i verdi per år?

c) Hva er den verdt etter 2 år?

6.2 En modell for høyden til et tre er $h(t) = 0{,}5\,t + 1$ meter, der t er antall år etter planting. Modellen er laget fra målinger de første 10 årene.

a) Hvor høyt er treet etter 6 år ifølge modellen?

b) Hva gir modellen etter 200 år? Er det rimelig?

6.3 Et mobilabonnement koster $K(x) = 199 + 0{,}5\,x$ kroner per måned, der x er antall minutter samtale. Nevn to premisser modellen bygger på.

6.4 En modell for antall solgte paraplyer per dag er $P(n) = 5 + 3n$, der n er antall millimeter nedbør. Modellen er laget fra dager med mellom 0 og 20 mm nedbør. Hva er gyldighetsområdet, og hva gir modellen for $n = 100$?

6.5 En nettside skriver: «Antall brukere har doblet seg hvert år i tre år. Om ti år vil vi ha over tusen ganger så mange brukere.» Vurder påstanden.

6.6 Hva skriver programmet ut?

Python

```
def V(t):
    return 8000 * 0.75**t

for t in [0, 1, 2]:
    print(t, V(t))
```

6.7 Forklar forskjellen på en opplysning og et premiss i en modelleringsoppgave. Gi et eksempel på hver.

6.8 Temperaturen i et kjøleskap etter at døra lukkes er $T(t) = 4 + 16 \cdot 0{,}8^t$, der t er minutter. Hva skjer med temperaturen på lang sikt, og hvorfor er dette en bedre modell enn en lineær?

6.2.1 Regresjon med Python

6.9 En lineær regresjon gir utskriften `0.8 12.5` for a og b.

a) Skriv opp modellen.

b) Regn ut y for $x = 20$.

6.10 En andregradsregresjon gir utskriften `-0.5 4.0 2.0` for a, b og c.

a) Skriv opp modellen.

b) Finn toppunktet.

6.11 En eksponentiell regresjon gir utskriften `500.0 1.08` for a og b.

a) Skriv opp modellen.

b) Hvor mange prosent vokser størrelsen per steg?

c) Regn ut modellverdien for $x = 2$.

6.12 En potensregresjon gir utskriften `2.0 3.0` for a og b.

a) Skriv opp modellen.

b) Regn ut y for $x = 2$.

c) Hvor mange ganger så stor blir y når x dobles?

6.13 Hva er forskjellen på `np.polyfit(x, y, 1)` og `np.polyfit(x, y, 2)`?

6.14 Hva er feil? «Regresjonslinja går gjennom alle målepunktene.»

6.15 Hva skriver programmet ut?

Python

```
import numpy as np
x = np.array([0, 1, 2, 3])
y = np.array([1, 3, 5, 7])
a, b = np.polyfit(x, y, 1)
print(round(a, 1), round(b, 1))
```

6.16 En eksponentiell modell for antall bakterier er $y = 200 \cdot 1{,}5^x$, der x er timer. Hvor mange bakterier er det etter 3 timer?

6.2.2 Velge og vurdere modell

EKSEMPEL *Differanser og forhold*

Tabellen viser bakterietellingen fra 6.2.1. Er veksten lineær eller eksponentiell?

x	0	1	2	3	4
y	100	152	224	341	506

Løsning

Differansene er 52, 72, 117 og 165, som øker. Forholdene er 1,52, 1,47, 1,52 og 1,48, omtrent like. Veksten er eksponentiell, med vekstfaktor omtrent 1,5. ∎

6.17 Hvilken modelltype passer best?

a) x: $0, 1, 2, 3$ og y: $10, 13, 16, 19$

b) x: $0, 1, 2, 3$ og y: $10, 15, 22{,}5, 33{,}75$

c) x: $0, 1, 2, 3$ og y: $1, 2, 5, 10$

6.18 En modell gir verdiene 12, 18 og 25, og de målte verdiene er 11, 19 og 25. Regn ut avvikene (målt minus modell).

6.19 Avvikene fra en lineær modell er -4, 1, 5, 2 og -3. Hva tyder mønsteret på?

6.20 To modeller er tilpasset de samme målingene. Summen av avvikene i andre er 240 for modell A og 12 for modell B. Hvilken passer best, og hva mer bør du vurdere?

6.21 Høyden til en ball er modellert med $h(t) = -5t^2 + 10t + 2$. Hva gir modellen for $t = 3$, og hva betyr det?

6.22 Hva skriver programmet ut? Er veksten lineær eller eksponentiell?

Python

```
y = [3, 6, 12, 24]
for i in range(3):
    print(y[i+1] - y[i], y[i+1] / y[i])
```

6.23 Hvorfor er en lineær modell ofte en dårlig modell for befolkningsvekst over mange år?

6.3.1 Modellering i praksis

EKSEMPEL *Pizzaprisene*

En pizzeria har disse prisene (tenkte tall):

Diameter (cm)	20	25	30	35	40
Pris (kr)	89	129	169	229	289

Lønner det seg å kjøpe store pizzaer?

Løsning

Spørsmål og premisser. Vi antar at alle pizzaene har samme tykkelse og fyll, slik at mengden pizza er proporsjonal med arealet.

Modell. Potensregresjon gir omtrent $P(d) = 0{,}55 \cdot d^{1{,}7}$. Eksponenten 1,7 er mindre enn 2, så prisen vokser langsommere enn arealet.

Løsning. Prisen per cm^2 er 0,28 kr for 20 cm og 0,23 kr for 40 cm. En 40 cm pizza har fire ganger så stort areal som en 20 cm, men koster bare litt over tre ganger så mye.

Tolkning og vurdering. Store pizzaer gir mest pizza for pengene. Men svaret bygger på at tykkelse og fyll er likt, og at du klarer å spise opp. Kjøper du for mye, blir det dyrere uansett. ∎

6.24 En pizza med diameter 25 cm koster 120 kr, og en med diameter 50 cm koster 400 kr. Hvilken gir mest pizza per krone?

6.25 En vannkoker på 2000 W brukes 10 minutter per dag. Strømmen koster 1,50 kr per kWh. Hva koster det per år?

6.26 Nevn stegene i modelleringsprosessen.

6.27 En familie på fire dusjer hver dag i 8 minutter, med 10 liter vann per minutt. Hvor mye vann bruker de på dusjing i året? Hvor mye sparer de hvis dusjtiden halveres?

6.28 Hva skriver programmet ut?

Python

```
personer = 4
minutter = 8
liter_per_min = 10
print(personer * minutter * liter_per_min * 365)
```

6.29 Et glass vann har 60 ° C, 45 ° C, 35 ° C og 28 ° C hvert tiende minutt. Hvorfor passer ikke en lineær modell? Hva bør modellen nærme seg?

6.30 Planlegg en modellering av spørsmålet «Hvor mye koster det å lade en elbil i et år?». Hvilke variabler og premisser trenger du?

6.31 Hvorfor bør du alltid oppgi premissene når du presenterer et svar fra en modell?

Fasit

6.1.1 Matematiske modeller

6.1
a) 300 000 kr
b) 15 %
c) $300\,000 \cdot 0{,}7225 = 216\,750$ kr

6.2
a) 4 m
b) 101 m. Det er urimelig, fordi trær slutter å vokse. Det er ekstrapolasjon langt utenfor gyldighetsområdet.

6.3
For eksempel at månedsprisen er fast, at hvert minutt koster det samme uansett tid og hvem du ringer, og at det ikke er andre avgifter.

6.4
Gyldighetsområdet er omtrent $0 \leqslant n \leqslant 20$. $P(100) = 305$, som er ekstrapolasjon og kan være urimelig, for eksempel fordi butikken ikke har så mange paraplyer.

6.5
$2^{10} = 1024$, så regningen stemmer. Men det er ekstrapolasjon fra tre år til ti år, og veksten vil avta når det blir færre nye mulige brukere.

6.6
`0 8000.0, 1 6000.0, 2 4500.0`

6.7
En opplysning er et faktum som er gitt, for eksempel at en tur koster 50 kr i startpris. Et premiss er en antakelse vi gjør selv for å forenkle, for eksempel at prisen per kilometer er den samme hele døgnet.

6.8
$0{,}8^t$ går mot 0, så temperaturen nærmer seg 4 ° C. En lineær modell ville fortsatt å synke under 4 ° C og til slutt gitt urimelige minusgrader.

6.2.1 Regresjon med Python

6.9
a) $y = 0{,}8\,x + 12{,}5$
b) 28,5

6.10
a) $y = -\,0{,}5\,x^2 + 4x + 2$
b) $x = 4$ og $y = -8 + 16 + 2 = 10$. Toppunktet er $(4, 10)$.

6.11
a) $y = 500 \cdot 1{,}08^x$
b) 8 %
c) $500 \cdot 1{,}1664 = 583{,}2$

6.12
a) $y = 2x^3$
b) 16
c) $2^3 = 8$

6.13
Den første finner den beste rette linja $y = ax + b$. Den andre finner den beste andregradsfunksjonen $y = ax^2 + bx + c$.

6.14
Regresjonslinja passer best i gjennomsnitt, men går som regel ikke gjennom noen av punktene nøyaktig.

6.15
`2.0 1.0`. Punktene ligger nøyaktig på $y = 2x + 1$.

6.16
$200 \cdot 3{,}375 = 675$

6.2.2 Velge og vurdere modell

6.17
a) Lineær, differansene er 3.
b) Eksponentiell, forholdene er 1,5.
c) Andregrad, differansene $1, 3, 5$ øker jevnt ($y = x^2 + 1$).

6.18
-1, 1 og 0

6.19
Negative i endene og positive i midten. Dataene krummer nedover, så en andregradsmodell med toppunkt passer trolig bedre.

6.20
B har mye mindre avvik. Du bør også vurdere om modellen gir mening i situasjonen og rimelige svar utenfor målingene.

6.21
$h(3) = -45 + 30 + 2 = -13$. Ballen kan ikke være under bakken, så modellen gjelder bare til ballen lander.

6.22
`3 2.0, 6 2.0, 12 2.0`. Forholdene er like, så veksten er eksponentiell.

6.23
Befolkningsvekst er ofte omtrent en fast prosent per år, altså eksponentiell. En lineær modell legger til det samme antallet hvert år og blir for lav på lang sikt. Over svært lang tid kan veksten også avta, og da passer ingen av dem.

6.3.1 Modellering i praksis

6.24
Arealet blir $2^2 = 4$ ganger så stort, men prisen bare $\frac{400}{120} \approx 3{,}3$ ganger så stor. Den store gir mest pizza per krone.

6.25
$2\,\text{kW} \cdot \frac{1}{6}\,\text{h} = \frac{1}{3}\,\text{kWh}$ per dag. Per år: $\frac{365}{3} \cdot 1{,}5 \approx 183$ kr.

6.26
Formulere spørsmålet, velge variabler og premisser, lage modellen, løse, tolke, vurdere og presentere.

6.27
$4 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 365 = 116\,800$ liter. Med halv dusjtid sparer de 58 400 liter.

6.28
116800

6.29
Temperaturen synker med 15, 10 og 7 grader, altså langsommere og langsommere. Den bør nærme seg romtemperaturen, ikke fortsette å synke.

6.30
For eksempel kjørelengde per år, forbruk i kWh per km og strømpris per kWh. Premisser: fast strømpris, lik kjøring hele året og lading hjemme. Modell: $K = \text{km} \cdot \text{kWh/km} \cdot \text{pris}$.

6.31
Svaret gjelder bare hvis premissene stemmer. Den som leser, må vite hva svaret bygger på for å kunne vurdere hvor mye de kan stole på det.