5 Likningssystemer og ulikheter

OPPGAVEHEFTE · MATEMATIKK 1T

Overskriftene viser til delkapitlene i boka. Først kommer et formelark for hele kapittelet. Under hver overskrift står gjennomregnede eksempler med løsning, og deretter oppgaver du skal løse uten hjelpemidler, som på del 1 av eksamen. Fasiten står bakerst.

Formelark

LIKNINGSSYSTEMER

Innsetting og addisjon

fjern én ukjent om gangen

Antall løsninger (to linjer)

skjærer: 1 parallelle: 0 like: ∞

Linje og parabel

$D > 0 : 2$ $D = 0 : 1$ $D < 0 : 0$

- En løsning består av alle de ukjente. Sjekk i alle likningene.

ULIKHETER

Negativt tall snur tegnet

$$-3x \leqslant 6 \Leftrightarrow x \geqslant -2$$

Andregradsulikhet

$$(x-3)(x+2) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 3$$

To deler

$$x^2 - 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -2 \vee x \geqslant 2$$

Rasjonal ulikhet

$$\frac{2}{x-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{3-x}{x-1} < 0$$

- Samle alt på én side, faktoriser og lag fortegnslinje.
- Ikke gang eller del med uttrykk med x. Nullpunktene til nevneren er aldri med.

5.1.1 Lineære likningssystemer

EKSEMPEL *Innsettingsmetoden*

Løs systemet

$$y = 2x - 1$$
$$3x + 2y = 12$$

Løsning

$3x + 2(2x - 1) = 12$ gir $7x - 2 = 12$, så $x = 2$. Da er $y = 2 \cdot 2 - 1 = 3$. Løsningen er $x = 2$ og $y = 3$.

Sjekk i den andre likningen: $3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 12$. ∎

EKSEMPEL *Addisjonsmetoden*

Løs systemene.

a)

$$3x + 2y = 13$$
$$5x - 2y = 11$$

b)

$$3v + 2b = 520$$
$$v + 4b = 440$$

Løsning

a) Vi legger sammen likningene: $8x = 24$, så $x = 3$. Da er $9 + 2y = 13$, så $y = 2$.

b) Den første likningen ganget med 2 er $6v + 4b = 1040$. Vi trekker fra den andre: $5v = 600$, så $v = 120$. Da er $120 + 4b = 440$, så $b = 80$. Voksenbilletten koster 120 kr og barnebilletten 80 kr. ∎

5.1 Løs med innsettingsmetoden.

a) $y = 2x$ og $x + y = 9$

b) $x = y + 2$ og $2x + y = 10$

5.2 Løs med addisjonsmetoden.

a) $x + y = 12$ og $x - y = 2$

b) $3x - 2y = 4$ og $x + y = 3$

5.3 Løs $2x + 3y = 13$ og $x - y = -1$.

5.4 Hvor mange løsninger har systemet?

a) $y = -x + 4$ og $y = -x + 1$

b) $3x - y = 2$ og $6x - 2y = 4$

c) $y = 2x$ og $y = 3x - 1$

5.5 Løs systemet grafisk ved å tegne linjene $y = x + 1$ og $y = -2x + 7$.

5.6 To voksne og tre barn betaler 480 kr i inngang. Én voksen og to barn betaler 280 kr. Hva koster billettene?

5.7 Summen av to tall er 30, og differansen er 8. Finn tallene.

5.8 Hva er feil? Ola løser $2x + y = 7$ og $x + y = 4$ ved å trekke fra og får $x = 11$.

5.9 Hva skriver programmet ut?

Python

```
for x in range(-5, 6):
    for y in range(-5, 6):
        if x + y == 1 and x - y == 5:
            print(x, y)
```

5.10 For hvilken verdi av k har systemet $2x + ky = 5$ og $4x + 6y = 1$ ingen løsning?

5.2.1 Tre likninger med tre ukjente

EKSEMPEL *Eliminasjon*

Løs systemet

$$x + y + z = 6$$
$$2x - y + z = 3$$
$$x + 2y - z = 2$$

Løsning

Første pluss tredje: $2x + 3y = 8$. Andre pluss tredje: $3x + y = 5$, så $y = 5 - 3x$.

Innsetting: $2x + 3(5 - 3x) = 8$ gir $-7x = -7$, så $x = 1$ og $y = 2$. Fra den første: $z = 6 - 1 - 2 = 3$.

Sjekk: $2 - 2 + 3 = 3$ og $1 + 4 - 3 = 2$. Løsningen er $x = 1$, $y = 2$ og $z = 3$. ∎

EKSEMPEL *Parabel gjennom tre punkter*

Finn andregradsfunksjonen $f(x) = ax^2 + bx + c$ som går gjennom $(0, 1)$, $(1, 4)$ og $(2, 11)$.

Løsning

$f(0) = c = 1$. $f(1) = a + b + 1 = 4$, så $a + b = 3$. $f(2) = 4a + 2b + 1 = 11$, så $2a + b = 5$. Vi trekker fra: $a = 2$, og da er $b = 1$. Altså er $f(x) = 2x^2 + x + 1$. ∎

5.11 Løs systemet $x + y + z = 10$, $y + z = 7$ og $z = 4$.

5.12 Løs systemet $x + y + z = 6$, $x - y + z = 2$ og $2x + y - z = 1$.

5.13 Løs systemet $x + y + z = 12$, $x - y = 2$ og $y - z = 2$.

5.14 Finn andregradsfunksjonen gjennom $(0, -2)$, $(1, 1)$ og $(2, 6)$.

5.15 Finn andregradsfunksjonen gjennom $(-1, 6)$, $(0, 3)$ og $(1, 2)$.

5.16 Tre venner har til sammen 90 kr. Anna har dobbelt så mye som Bo, og Bo har 10 kr mer enn Cecilie. Hvor mye har hver?

5.17 Hvor mange kombinasjoner prøver programmet?

Python

```
for x in range(1, 6):
    for y in range(1, 6):
        for z in range(1, 6):
            if x + y + z == 6:
                print(x, y, z)
```

5.18 Hva er feil? Mia løser et system med tre ukjente. Hun bruker den første og den andre likningen til å fjerne x, og den første og den tredje til å fjerne y.

5.3.1 Ikke-lineære likningssystemer

EKSEMPEL *Linje og parabel*

Løs systemet $y = x^2$ og $y = x + 2$.

Løsning

$x^2 = x + 2$ gir $x^2 - x - 2 = 0$, altså $(x - 2)(x + 1) = 0$ og $x = 2 \vee x = -1$. Fra $y = x + 2$ er $y = 4$ og $y = 1$. Løsningene er $(2, 4)$ og $(-1, 1)$. ∎

EKSEMPEL *Produkt og sum*

Løs systemet $xy = 6$ og $x + y = 5$.

Løsning

$x(5 - x) = 6$ gir $x^2 - 5x + 6 = 0$, altså $x = 2 \vee x = 3$. Da er $y = 3$ eller $y = 2$. Løsningene er $(2, 3)$ og $(3, 2)$. Det er de to tallene med sum 5 og produkt 6. ∎

EKSEMPEL *Tangent*

Vis at linja $y = 2x - 1$ tangerer parabelen $y = x^2$, og finn tangeringspunktet.

Løsning

$x^2 - 2x + 1 = 0$ har $D = 4 - 4 = 0$, så det er én løsning: $(x - 1)^2 = 0$ gir $x = 1$ og $y = 1$. Linja tangerer parabelen i $(1, 1)$. Det stemmer med 4.8.2: Tangenten til x^2 i $x = 1$ har stigningstall 2. ∎

5.19 Løs systemet $y = x^2$ og $y = 2x + 3$.

5.20 Løs systemet $y = x^2 - 1$ og $y = x + 1$.

5.21 Løs systemet $xy = 12$ og $x + y = 7$.

5.22 Hvor mange løsninger har systemet?

a) $y = x^2 + 2$ og $y = 1$

b) $y = x^2$ og $y = -2x - 1$

c) $y = x^2 - 3$ og $y = x$

5.23 Et rektangel har omkrets 20 cm og areal 24 cm^2. Finn sidene.

5.24 For hvilken verdi av k tangerer linja $y = 4x + k$ parabelen $y = x^2$?

5.25 Hva skriver programmet ut?

Python

```
for x in range(-5, 6):
    if x**2 == 2*x + 3:
        print(x, x**2)
```

5.26 Løs systemet $x^2 + y^2 = 25$ og $y = x + 1$.

5.4.1 Lineære ulikheter

EKSEMPEL *Løs ulikhetene*

Løs ulikhetene.

a) $3x - 5 > 7$

b) $2 - 3x \leqslant 8$

Løsning

a) $3x > 12$, så $x > 4$. Altså $x \in \langle 4, \rightarrow \rangle$.

b) $-3x \leqslant 6$. Vi deler på -3 og snur tegnet: $x \geqslant -2$. Altså $x \in [-2, \rightarrow \rangle$.

Sjekk b) med $x = 0$: $2 - 0 = 2 \leqslant 8$, som stemmer, og $0 \geqslant -2$. ∎

EKSEMPEL *Dobbel ulikhet*

Løs $-1 < 2x + 3 \leqslant 7$.

Løsning

$-4 < 2x \leqslant 4$, så $-2 < x \leqslant 2$. Altså $x \in \langle -2, 2]$. ∎

5.27 Løs ulikhetene.

a) $4x - 3 < 9$

b) $2x + 5 \geqslant 1$

c) $7 - 2x > 1$

5.28 Løs ulikhetene.

a) $-3x \leqslant 12$

b) $5 - x > 2x - 4$

c) $2(x - 3) \geqslant 5x$

5.29 Løs de doble ulikhetene.

a) $1 < 2x - 3 < 7$

b) $-4 \leqslant 3x + 2 \leqslant 5$

5.30 Løs $\frac{x}{3} + 1 > \frac{x}{2}$.

5.31 Skriv løsningen som intervall.

a) $x \geqslant 3$

b) $-1 < x \leqslant 4$

c) $x < 0$

5.32 En taxi koster 50 kr pluss 15 kr per kilometer. Hvor langt kan du kjøre for høyst 350 kr?

5.33 Hva er feil? $-2x > 8$ gir $x > -4$.

5.34 Hva skriver programmet ut?

Python

```
for x in range(-3, 4):
    if 7 - 2*x > 1:
        print(x)
```

5.5.1 Andregradsulikheter

EKSEMPEL *Ulikhet med to nullpunkter*

Løs ulikhetene.

a) $x^2 - x - 6 < 0$

b) $x^2 - 4 \geqslant 0$

Løsning

a) $(x-3)(x+2) < 0$. Fortegnslinja:

	$x < -2$	$-2 < x < 3$	$x > 3$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
Produkt	$+$	$-$	$+$

Løsningen er $-2 < x < 3$.

b) $(x-2)(x+2) \geqslant 0$. Parabelen er positiv utenfor nullpunktene, og null i dem. Løsningen er $x \leqslant -2 \vee x \geqslant 2$.

EKSEMPEL *Ballen*

Når er ballen med høyden $h(t) = -5t^2 + 20t$ mer enn 15 meter over bakken?

Løsning

$-5t^2 + 20t - 15 > 0$. Vi deler på -5 og snur tegnet: $t^2 - 4t + 3 < 0$, altså $(t-1)(t-3) < 0$. Løsningen er $1 < t < 3$. Ballen er over 15 meter mellom 1 og 3 sekunder.

5.35 Løs ulikhetene.

a) $x^2 - 2x - 8 < 0$

b) $x^2 - 16 \geqslant 0$

c) $x^2 - 3x > 0$

5.36 Løs ulikhetene.

a) $-x^2 + 9 \geqslant 0$

b) $-x^2 + x + 6 < 0$

5.37 Løs $x^2 < x + 6$.

5.38 Løs $2x^2 - 8x \leqslant 0$.

5.39 Løs ulikhetene.

a) $x^2 + 2 > 0$

b) $x^2 + 2 < 0$

c) $(x+1)^2 \leqslant 0$

5.40 En ball har høyden $h(t) = -5t^2 + 30t$ meter. Når er ballen mer enn 25 meter oppe?

5.41 Hva er feil? «$x^2 > 9$ gir $x > 3$.»

5.42 Hva skriver programmet ut?

Python

```
antall = 0
for x in range(-5, 6):
    if x**2 - 2*x - 8 < 0:
        antall = antall + 1
print(antall)
```

5.43 For hvilke k har $x^2 - 2x + k > 0$ for alle x?

5.5.2 Polynomulikheter av høyere grad

EKSEMPEL *Tre faktorer*

Løs $x^3 - 4x > 0$.

Løsning

	$x < -2$	$-2 < x < 0$	$0 < x < 2$	$x > 2$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
Produkt	$-$	$+$	$-$	$+$

Løsningen er $-2 < x < 0 \vee x > 2$.

EKSEMPEL *Faktoriser med polynomdivisjon*

Løs $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \geqslant 0$.

Løsning

Nullpunktene er -2, 1 og 3. Fortegnslinja for $(x+2)(x-1)(x-3)$ gir $-$, $+$, $-$, $+$ fra venstre mot høyre. Med $\geqslant$ er nullpunktene med. Løsningen er $-2 \leqslant x \leqslant 1 \vee x \geqslant 3$.

EKSEMPEL *Dobbelt nullpunkt*

Løs $x^2(x-2) < 0$.

Løsning

x^2 er positiv unntatt i $x = 0$, så fortegnet bestemmes av $x - 2$, som er negativ for $x < 2$. Men i $x = 0$ er produktet 0, ikke negativt. Løsningen er $x < 0 \vee 0 < x < 2$.

5.44 Løs ulikhetene.

a) $x(x-1)(x+3) > 0$

b) $(x-2)(x+1)(x-5) \leqslant 0$

5.45 Løs $x^3 - x^2 - 6x < 0$.

5.46 Løs $x^3 + x^2 - 4x - 4 \geqslant 0$.

5.47 Løs $x^3 - 4x^2 + x + 6 > 0$. Bruk at $x = -1$ er et nullpunkt.

5.48 Løs ulikhetene.

a) $x^2(x-4) > 0$

b) $(x-1)^2(x+2) \leqslant 0$

5.49 Løs $x^4 - 10x^2 + 9 \leqslant 0$.

5.50 Hva er feil? «$x^3 < 4x$ gir $x^2 < 4$, så $-2 < x < 2$.»

5.51 Hva skriver programmet ut?

Python

```
for x in [-3, -1, 1, 3]:
    print(x, x**3 - x**2 - 6*x)
```

5.6.1 Rasjonale ulikheter

EKSEMPEL *Brøk mot null*

Løs ulikhetene.

a) $\dfrac{x-2}{x+1} > 0$

b) $\dfrac{x+3}{x-1} \leqslant 0$

Løsning

a)

	$x < -1$	$-1 < x < 2$	$x > 2$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
Brøk	$+$	$-$	$+$

Løsningen er $x < -1 \vee x > 2$.

b) Fortegnslinja gir $+$, $-$, $+$ med nullpunkter i -3 og 1. Telleren gir 0 i $x = -3$, som er med. Nevneren er 0 i $x = 1$, som ikke er med. Løsningen er $-3 \leqslant x < 1$.

EKSEMPEL *Ikke gang med nevneren*

Løs $\dfrac{2}{x-1} < 1$.

Løsning

$$\frac{2}{x-1} - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2-(x-1)}{x-1} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3-x}{x-1} < 0$$

Fortegnslinja for $3-x$ og $x-1$ gir $-$, $+$, $-$ med bruddpunkter i 1 og 3. Løsningen er $x < 1 \vee x > 3$. Det stemmer med at $x = 0$ var en løsning.

5.52 Løs ulikhetene.

a) $\dfrac{x+1}{x-2} > 0$

b) $\dfrac{x-3}{x+1} \leqslant 0$

5.53 Løs $\dfrac{x}{x-4} \geqslant 0$.

5.54 Løs $\dfrac{3}{x+2} > 1$.

5.55 Løs $\dfrac{x+4}{x} \leqslant 3$.

5.56 Løs $\dfrac{x^2-9}{x+1} < 0$.

5.57 Hva er feil? «$\dfrac{1}{x} < 2$ gir $1 < 2x$, så $x > \dfrac{1}{2}$.»

5.58 Hva skriver programmet ut?

Python

```
for x in [-2, 0, 1, 3, 4]:
    if (x - 3) / (x + 1) <= 0:
        print(x)
```

5.59 Hvorfor er nullpunktet til nevneren aldri med i løsningen av en rasjonal ulikhet?

Fasit

5.1.1 Lineære likningssystemer

5.1
a) $x = 3$, $y = 6$
b) $3y + 4 = 10$, $y = 2$, $x = 4$

5.2
a) $x = 7$, $y = 5$
b) Gang den andre med 2: $2x + 2y = 6$. Legg sammen: $5x = 10$, $x = 2$, $y = 1$.

5.3
$x = y - 1$, så $2y - 2 + 3y = 13$, $y = 3$ og $x = 2$.

5.4
a) Ingen
b) Uendelig mange
c) Én, $(1, 2)$

5.5
Linjene skjærer hverandre i $(2, 3)$.

5.6
$2v + 3b = 480$ og $v + 2b = 280$. Den andre ganget med 2 minus den første gir $b = 80$, og $v = 120$.

5.7
$x + y = 30$ og $x - y = 8$ gir $x = 19$ og $y = 11$.

5.8
$7 - 4 = 3$, ikke 11. Riktig er $x = 3$ og $y = 1$.

5.9
3 -2

5.10
Linjene er parallelle når $\frac{2}{4} = \frac{k}{6}$, altså $k = 3$. Da er $2x + 3y = 5$ og $2x + 3y = \frac{1}{2}$, som er motstridende.

5.2.1 Tre likninger med tre ukjente

5.11
$z = 4$, $y = 3$, $x = 3$.

5.12
Første minus andre: $2y = 4$, $y = 2$. Da er $x + z = 4$ og $2x - z = -1$, så $3x = 3$, $x = 1$ og $z = 3$.

5.13
$x = 6$, $y = 4$, $z = 2$

5.14
$c = -2$, $a + b = 3$, $4a + 2b = 8$. Da er $a = 1$, $b = 2$, og $f(x) = x^2 + 2x - 2$.

5.15
$c = 3$, $a - b = 3$, $a + b = -1$. Da er $a = 1$, $b = -2$, og $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

5.16
$a = 2b$ og $c = b - 10$. $2b + b + b - 10 = 90$, så $b = 25$, $a = 50$ og $c = 15$.

5.17
$5^3 = 125$ kombinasjoner. Det skriver ut de 10 trippelene av positive heltall med sum 6.

5.18
Hun har fjernet ulike ukjente. Da står hun igjen med to likninger der den ene har y og z og den andre x og z, altså fortsatt tre ukjente. Hun må fjerne den samme ukjente i begge parene.

5.3.1 Ikke-lineære likningssystemer

5.19
$x^2 - 2x - 3 = 0$ gir $x = 3 \vee x = -1$. Løsningene er $(3, 9)$ og $(-1, 1)$.

5.20
$x^2 - x - 2 = 0$ gir $x = 2 \vee x = -1$. Løsningene er $(2, 3)$ og $(-1, 0)$.

5.21
$x(7 - x) = 12$ gir $x = 3 \vee x = 4$. Løsningene er $(3, 4)$ og $(4, 3)$.

5.22
a) Ingen
b) Én, $(-1, 1)$
c) To

5.23
$l + b = 10$ og $lb = 24$ gir $l^2 - 10l + 24 = 0$, så sidene er 4 cm og 6 cm.

5.24
$x^2 - 4x - k = 0$ har $D = 16 + 4k = 0$ når $k = -4$.

5.25
-1 1 og 3 9.

5.26
$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 25$ gir $x^2 + x - 12 = 0$, så $x = 3 \vee x = -4$. Løsningene er $(3, 4)$ og $(-4, -3)$.

5.4.1 Lineære ulikheter

5.27
a) $x < 3$
b) $x \geqslant -2$
c) $x < 3$

5.28
a) $x \geqslant -4$
b) $-3x > -9$, $x < 3$
c) $-3x \geqslant 6$, $x \leqslant -2$

5.29
a) $2 < x < 5$
b) $-2 \leqslant x \leqslant 1$

5.30
Gang med 6: $2x + 6 > 3x$, så $x < 6$.

5.31
a) $[3, \rightarrow\rangle$
b) $\langle -1, 4]$
c) $\langle \leftarrow, 0\rangle$

5.32
$50 + 15x \leqslant 350$ gir $x \leqslant 20$. Høyst 20 km.

5.33
Når du deler på -2, må tegnet snus. Riktig er $x < -4$.

5.34
-3, -2, -1, 0, 1 og 2, siden løsningen er $x < 3$.

5.5.1 Andregradsulikheter

5.35
a) $-2 < x < 4$
b) $x \leqslant -4 \vee x \geqslant 4$
c) $x < 0 \vee x > 3$

5.36
a) $-3 \leqslant x \leqslant 3$
b) $-(x - 3)(x + 2) < 0$: $x < -2 \vee x > 3$

5.37
$x^2 - x - 6 < 0$, $(x - 3)(x + 2) < 0$, så $-2 < x < 3$.

5.38
$2x(x - 4) \leqslant 0$ gir $0 \leqslant x \leqslant 4$.

5.39
a) Alle x
b) Ingen løsning
c) $x = -1$

5.40
$-5t^2 + 30t - 25 > 0$ gir $t^2 - 6t + 5 < 0$, $(t - 1)(t - 5) < 0$, så $1 < t < 5$.

5.41
Også $x < -3$ gir $x^2 > 9$. Riktig er $x < -3 \vee x > 3$.

5.42
Løsningen er $-2 < x < 4$, så heltallene er $-1, 0, 1, 2, 3$. Utskriften er 5.

5.43
$D = 4 - 4k < 0$ gir $k > 1$.

5.5.2 Polynomulikheter av høyere grad

5.44
a) Fortegn $-$, $+$, $-$, $+$: $-3 < x < 0 \vee x > 1$
b) Fortegn $-$, $+$, $-$, $+$: $x \leqslant -1 \vee 2 \leqslant x \leqslant 5$

5.45
$x(x - 3)(x + 2) < 0$. Fortegn $-$, $+$, $-$, $+$: $x < -2 \vee 0 < x < 3$.

5.46
$(x+1)(x-2)(x+2) \geqslant 0$. Fortegn $-$, $+$, $-$, $+$: $-2 \leqslant x \leqslant -1 \vee x \geqslant 2$.

5.47
$(x+1)(x-2)(x-3) > 0$: $-1 < x < 2 \vee x > 3$

5.48
a) $x > 4$
b) $x \leqslant -2 \vee x = 1$

5.49
$(x-1)(x+1)(x-3)(x+3) \leqslant 0$.
Fortegn $+$, $-$, $+$, $-$, $+$: $-3 \leqslant x \leqslant -1 \vee 1 \leqslant x \leqslant 3$.

5.50
Det er delt på x, som kan være negativ. Riktig: $x(x-2)(x+2) < 0$ gir $x < -2 \vee 0 < x < 2$.

5.51
`-3 -18, -1 4, 1 -6, 3 0.`

5.6.1 Rasjonale ulikheter

5.52
a) $x < -1 \vee x > 2$
b) $-1 < x \leqslant 3$

5.53
$x \leqslant 0 \vee x > 4$

5.54
$\dfrac{3-(x+2)}{x+2} = \dfrac{1-x}{x+2} > 0$ gir $-2 < x < 1$.

5.55
$\dfrac{x+4-3x}{x} = \dfrac{4-2x}{x} \leqslant 0$ gir $x < 0 \vee x \geqslant 2$.

5.56
$\dfrac{(x-3)(x+3)}{x+1} < 0$. Fortegn $-$, $+$, $-$, $+$ med bruddpunkter -3, -1, 3: $x < -3 \vee -1 < x < 3$.

5.57
Det er ganget med x, som kan være negativ. $\dfrac{1-2x}{x} < 0$ gir $x < 0 \vee x > \dfrac{1}{2}$.

5.58
0, 1 og 3. Løsningen er $-1 < x \leqslant 3$.

5.59
Der er nevneren null, og brøken er ikke definert. Da kan den verken være større enn, mindre enn eller lik noe.