4 Funksjoner

Overskriftene viser til delkapitlene i boka. Først kommer et formelark for hele kapittelet. Under hver overskrift står gjennomregnede eksempler med løsning, og deretter oppgaver du skal løse uten hjelpemidler, som på del 1 av eksamen. Fasiten står bakerst.

Formelark

FUNKSJONER OG GRAFER

Definisjonsmengde

$$\sqrt{x-2} : x \geqslant 2 \qquad \frac{1}{x-3} : x \neq 3$$

Nullpunkt og skjæringspunkt

$$f(x) = 0 \qquad f(x) = g(x)$$

Lineær funksjon

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad y - y_1 = a(x - x_1)$$

- Et punkt har to koordinater. Et nullpunkt er en x-verdi.

FUNKSJONSTYPER

Andregradsfunksjon

$$x = -\frac{b}{2a} \quad \text{(symmetrilinje)}$$

Polynom av grad n

høyst n nullpunkter, $n-1$ topp/bunn

Rasjonal funksjon

$$\frac{2x+1}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1}$$

Potensfunksjon

$$f(x) = a \cdot x^b, \quad f(kx) = k^b f(x)$$

Eksponentialfunksjon

$$f(x) = a \cdot b^x, \quad b = 1 \pm \frac{p}{100}$$

- Vertikal asymptote der nevneren er null, nullpunkt der telleren er null.
- Lineær vekst: pluss det samme. Eksponentiell vekst: ganger med det samme.

VEKSTFART OG DEN DERIVERTE

Gjennomsnittlig vekstfart

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Den deriverte

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Derivasjonsregler

$$(x^n)' = nx^{n-1} \qquad (c)' = 0$$

Tangentlikningen

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Drøfting

$f' > 0$: voksende $\qquad f' < 0$: avtakende

- Topp- og bunnpunkter: $f'(a) = 0$ med fortegnsskifte. Uten fortegnsskifte: terrassepunkt.

4.1.1 Funksjonsbegrepet

EKSEMPEL *Funksjonsverdier*

La $f(x) = x^2 - 3x$.

a) Regn ut $f(2)$ og $f(-1)$.

b) Løs $f(x) = 4$.

Løsning

a) $f(2) = 4 - 6 = -2$ og $f(-1) = (-1)^2 - 3 \cdot (-1) = 1 + 3 = 4$.

b) $x^2 - 3x - 4 = 0$, $(x - 4)(x + 1) = 0$, så $x = 4 \vee x = -1$.

■

EKSEMPEL *Finn definisjonsmengden*

Finn definisjonsmengden.

a) $f(x) = \sqrt{x - 2}$

b) $g(x) = \dfrac{1}{x - 3}$

c) $P(t) = 20t$, der t er antall timer, og plassen er åpen i høyst 10 timer.

Løsning

a) $x - 2 \geqslant 0$, så $D_f = [2, \rightarrow\rangle$.

b) $x - 3 \neq 0$, så $D_g = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, alle reelle tall unntatt 3.

c) $D_P = [0, 10]$.

■

EKSEMPEL *Finn verdimengden*

Finn verdimengden til $f(x) = x^2 + 1$.

Løsning

$x^2 \geqslant 0$, så $f(x) = x^2 + 1 \geqslant 1$. Alle verdier fra 1 og oppover kan nås. $V_f = [1, \rightarrow\rangle$.

■

4.1 La $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Regn ut

a) $f(0)$

b) $f(3)$

c) $f(-2)$

4.2 La $g(x) = 4 - 3x$.

a) Regn ut $g(-1)$.

b) Løs $g(x) = -8$.

4.3 La $f(x) = x^2 + 2x$. Løs $f(x) = 8$.

4.4 Er sammenhengen en funksjon av x?

a) Hver elev og elevens fødselsdato (x er eleven).

b) Hver fødselsdato og eleven med den datoen (x er datoen).

c) $y = x^2$

4.5 Finn definisjonsmengden.

a) $f(x) = \sqrt{x - 5}$

b) $g(x) = \dfrac{2}{x + 4}$

c) $h(x) = \sqrt{3 - x}$

4.6 Finn verdimengden.

a) $f(x) = x^2 + 3$

b) $g(x) = -x^2$

c) $h(x) = 2x + 1$, $D_h = [0, 4]$

4.7 En mobil koster $P(t) = 99t$ kroner for t måneder, og avtalen varer i høyst 24 måneder. Finn definisjonsmengden og verdimengden.

4.8 La $f(x) = 3x - 2$. Finn $f(a + 2)$ og $f(2a)$.

4.9 Hva skriver programmet ut?

Python

```
def f(x):
    return x**2 - 2*x + 3

print(f(3), f(-1))
```

4.10 La $f(x) = x^2 - 4x$. For hvilke x er $f(x) = x$?

4.1.2 Grafer

EKSEMPEL *Skjæringspunkter ved regning*

Finn skjæringspunktene mellom grafene til $f(x) = x^2 - 2x - 3$ og $g(x) = x + 1$ ved regning.

Løsning

$x^2 - 2x - 3 = x + 1$ gir $x^2 - 3x - 4 = 0$, altså $(x - 4)(x + 1) = 0$ og $x = 4 \vee x = -1$. $g(4) = 5$ og $g(-1) = 0$. Skjæringspunktene er $(4, 5)$ og $(-1, 0)$.

■

4.11 Lag en verditabell for $f(x) = x^2 - 4$ med $x = -3, -2, \ldots, 3$, og tegn grafen.

4.12 La $f(x) = x^2 - x - 6$.

a) Finn nullpunktene.

b) Hvor skjærer grafen y-aksen?

4.13 Finn skjæringspunktene mellom grafene til $f(x) = x^2$ og $g(x) = 2x + 3$.

4.14 Bruk oppgaven over. For hvilke x er $f(x) < g(x)$?

4.15 La $f(x) = -x^2 + 4$. For hvilke x er $f(x) > 0$?

4.16 Grafen til $f(x) = x^2 - 8x + 12$ har nullpunktene 2 og 6. Finn bunnpunktet.

4.17 For hvilke verdier av c skjærer linja $y = c$ grafen til $f(x) = x^2 + 2x$ i to punkter?

4.18 Hva skriver programmet ut? Hvilke av x-verdiene er nullpunkter?

Python

```
for x in range(-3, 4):
    print(x, x**2 - x - 6)
```

4.19 Hva er feil? «Toppunktet til $f(x) = -x^2 + 6x$ er 3.»

4.2.1 Lineære funksjoner

EKSEMPEL *Linja gjennom to punkter*

Finn funksjonsuttrykket til linja gjennom $(1, 3)$ og $(4, 9)$.

Løsning

$$a = \frac{9-3}{4-1} = 2$$

Ettpunktsformelen med $(1, 3)$: $y - 3 = 2(x - 1)$, så $y = 2x + 1$. Sjekk med $(4, 9)$: $2 \cdot 4 + 1 = 9$. ∎

EKSEMPEL *Skjæringspunkt og parallell linje*

a) Finn skjæringspunktet mellom $y = 2x + 1$ og $y = -x + 7$.

b) Finn linja som er parallell med $y = 3x - 2$ og går gjennom $(1, 4)$.

Løsning

a) $3x = 6$, $x = 2$ og $y = 5$. Skjæringspunktet er $(2, 5)$.

b) $a = 3$, og $y - 4 = 3(x - 1)$ gir $y = 3x + 1$. ∎

4.20 Finn stigningstallet til linja gjennom punktene.

a) $(0, 1)$ og $(2, 7)$

b) $(1, 5)$ og $(4, -1)$

c) $(-2, -3)$ og $(2, 5)$

4.21 Finn funksjonsuttrykket.

a) Stigningstall 4, gjennom $(1, 2)$.

b) Gjennom $(2, 3)$ og $(6, 11)$.

c) Gjennom $(0, -2)$ og $(3, -8)$.

4.22 Finn skjæringspunktet mellom $y = 2x - 3$ og $y = -x + 6$.

4.23 Finn linja som er parallell med $y = 3x + 1$ og går gjennom $(2, 4)$.

4.24 En treningsavtale koster 300 kr i innmelding og 250 kr per måned.

a) Sett opp en lineær funksjon for kostnaden etter x måneder.

b) Tolk stigningstallet og konstantleddet.

4.25 Ligger punktene $(0, 1)$, $(2, 5)$ og $(5, 11)$ på samme linje?

4.26 Linja $y = 3x - 6$ danner en trekant med aksene. Finn arealet.

4.27 Hva skriver programmet ut?

Python

```
x1, y1 = 2, 3
x2, y2 = 6, 11
a = (y2 - y1) / (x2 - x1)
print(a, y1 - a * x1)
```

4.28 For hvilken verdi av k er linjene $y = kx + 1$ og $y = 4x - 3$ parallelle? For hvilken k skjærer de hverandre i $x = 2$?

4.3.1 Andregradsfunksjoner

EKSEMPEL *Drøft en parabel*

La $g(x) = -x^2 + 2x + 3$. Finn nullpunktene, symmetrilinja og toppunktet.

Løsning

$-x^2 + 2x + 3 = 0$ gir $x^2 - 2x - 3 = 0$, $(x - 3)(x + 1) = 0$, så nullpunktene er $x = 3$ og $x = -1$.

Symmetrilinja er $x = -\frac{2}{2 \cdot (-1)} = 1$, midt mellom -1 og 3. $g(1) = -1 + 2 + 3 = 4$, så toppunktet er $(1, 4)$. ∎

EKSEMPEL *Størst høyde*

Høyden til en ball er $h(t) = -5t^2 + 20t$ meter etter t sekunder. Når er ballen høyest, og hvor høyt går den?

Løsning

$t = -\frac{20}{2 \cdot (-5)} = 2$, og $h(2) = -20 + 40 = 20$. Ballen er høyest etter 2 sekunder, 20 meter over bakken. Den er tilbake på bakken etter 4 sekunder, fordi $h(t) = -5t(t - 4)$. ∎

4.29 Har grafen et toppunkt eller et bunnpunkt? Hvor skjærer den y-aksen?

a) $f(x) = 3x^2 - x + 2$

b) $g(x) = -2x^2 + 5$

4.30 La $f(x) = x^2 - 2x - 8$.

a) Finn nullpunktene.

b) Finn symmetrilinja.

c) Finn bunnpunktet.

4.31 Finn toppunktet til $f(x) = -x^2 - 4x + 1$.

4.32 Finn bunnpunktet til $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$.

4.33 En ball har høyden $h(t) = -5t^2 + 10t + 15$ meter.

a) Når er ballen høyest, og hvor høyt?

b) Når treffer den bakken?

4.34 Du har 36 m gjerde til et rektangel. Finn sidene som gir størst areal.

4.35 En andregradsfunksjon har nullpunktene -1 og 3 og går gjennom $(0, -6)$. Finn funksjonsuttrykket.

4.36 Hva er feil? «Bunnpunktet til $f(x) = x^2 + 4x$ ligger i $x = -\frac{4}{2} = -2$, og $f(-2) = 4 + 8 = 12$.»

4.37 *Python* Hva skriver programmet ut? Hvor ligger toppunktet?

```
for x in range(0, 5):
    print(x, -x**2 + 4*x)
```

4.38 For hvilken verdi av c har $f(x) = x^2 - 6x + c$ bunnpunkt på x-aksen?

4.3.2 Polynomfunksjoner av høyere grad

EKSEMPEL *Nullpunkter og fortegn*

La $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$.

a) Finn nullpunktene.

b) For hvilke x er $f(x) > 0$?

Løsning

a) $f(x) = (x^2 - 1)(x - 3) = (x - 1)(x + 1)(x - 3)$. Nullpunktene er -1, 1 og 3.

b) $f(0) = 3 > 0$ og $f(2) = 8 - 12 - 2 + 3 = -3 < 0$. Langt til høyre er f positiv, og langt til venstre negativ. Altså er $f(x) > 0$ for $-1 < x < 1$ og for $x > 3$.

EKSEMPEL *Dobbelt nullpunkt*

Beskriv grafen til $f(x) = x(x - 2)^2$ nær nullpunktene.

Løsning

Nullpunktene er 0 og 2. I $x = 0$ skifter f fortegn, så grafen krysser x-aksen. $(x - 2)^2$ er aldri negativ, så i $x = 2$ skifter ikke f fortegn. Der berører grafen x-aksen og snur, i et bunnpunkt $(2, 0)$.

4.39 Finn graden og nullpunktene.

a) $f(x) = x^3 - 9x$

b) $g(x) = x^4 - 4x^2$

c) $h(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 4)$

4.40 La $f(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 4)$. For hvilke x er $f(x) > 0$?

4.41 Hva gjør grafen langt til venstre og langt til høyre?

a) $f(x) = 2x^3 - x$

b) $g(x) = -x^3 + 5x^2$

c) $h(x) = x^4 - 3x^2$

4.42 Finn nullpunktene til $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$.

4.43 Finn nullpunktene til $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

4.44 Beskriv grafen til $f(x) = x^2(x - 3)$ nær nullpunktene.

4.45 Finn en tredjegradsfunksjon med 1 foran x^3 og nullpunktene 0, 2 og -3.

4.46 Hvor mange nullpunkter og topp- og bunnpunkter kan en polynomfunksjon av grad 5 høyst ha?

4.47 *Python* Hva skriver programmet ut? Hvor mange av verdiene er positive?

```
for x in range(-2, 3):
    print(x, x**3 - x)
```

4.4.1 Rasjonale funksjoner

EKSEMPEL *Finn asymptoter og nullpunkt*

La $f(x) = \frac{2x + 1}{x - 1}$. Finn definisjonsmengden, asymptotene, nullpunktet og skjæringen med y-aksen.

Løsning

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Vertikal asymptote $x = 1$. Horisontal asymptote $y = \frac{2}{1} = 2$. Nullpunkt: $2x + 1 = 0$ gir $x = -\frac{1}{2}$. Skjæring med y-aksen: $f(0) = \frac{1}{-1} = -1$.

4.48 Finn definisjonsmengden, asymptotene og nullpunktet.

a) $f(x) = \frac{x - 4}{x + 1}$

b) $g(x) = \frac{2x + 6}{x - 3}$

4.49 Finn asymptotene til $h(x) = \frac{5}{x - 2}$.

4.50 Finn skjæringspunktet med y-aksen til $f(x) = \frac{3x - 1}{x + 2}$.

4.51 Skriv $f(x) = \frac{3x + 7}{x + 2}$ på formen $a + \frac{b}{x + 2}$.

4.52 Har $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$ en vertikal asymptote?

4.53 Finn a og b slik at $f(x) = \frac{ax - 1}{x + b}$ har asymptotene $x = -4$ og $y = 3$.

4.54 Hva skriver programmet ut? Hvilket tall nærmer verdiene seg?

Python

```
for x in [10, 100, 1000]:
    print(x, round((3*x + 1) / (x - 2), 3))
```

4.55 Hva er feil? «Nullpunktet til $f(x) = \dfrac{x+5}{x-1}$ er $x = 1$.»

4.5.1 Potensfunksjoner

EKSEMPEL *Funksjonsverdier*

Regn ut uten kalkulator.

a) $f(2)$ når $f(x) = 3x^2$

b) $g(9)$ når $g(x) = 2\sqrt{x}$

c) $h(8)$ når $h(x) = x^{2/3}$

Løsning

a) $3 \cdot 4 = 12$

b) $2 \cdot 3 = 6$

c) $\left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4$

■

EKSEMPEL *Finn konstantene*

a) $f(x) = a \cdot x^2$ går gjennom $(2, 12)$. Finn a.

b) $g(x) = 3x^b$ går gjennom $(4, 6)$. Finn b.

Løsning

a) $a \cdot 4 = 12$, så $a = 3$.

b) $4^b = 2$, og $4^{1/2} = 2$, så $b = \dfrac{1}{2}$.

■

4.56 Regn ut.

a) $f(4)$ når $f(x) = 2x^{3/2}$

b) $g(27)$ når $g(x) = x^{1/3}$

c) $h(5)$ når $h(x) = 10x^{-1}$

4.57 Hvordan oppfører funksjonen seg for $x > 0$?

a) $f(x) = x^{1,5}$

b) $g(x) = x^{0,2}$

c) $h(x) = x^{-0,5}$

4.58 Finn konstantene.

a) $f(x) = a \cdot x^2$ går gjennom $(3, 18)$.

b) $g(x) = 5x^b$ går gjennom $(4, 10)$.

4.59 Hvor mange ganger så stor blir funksjonsverdien når x tredobles?

a) $f(x) = x^2$

b) $g(x) = 4x^3$

c) $h(x) = x^{1/2}$

4.60 Arealet av en sirkel er $A = \pi r^2$. Hvor mange ganger så stort blir arealet når radien blir 5 ganger så stor?

4.61 Hva er forskjellen på $f(x) = x^3$ og $g(x) = 3^x$? Regn ut $f(4)$ og $g(4)$.

4.62 Hva skriver programmet ut?

Python

```
for x in [1, 4, 9]:
    print(x, 2 * x**0.5)
```

4.63 En potensfunksjon $f(x) = a \cdot x^b$ går gjennom $(1, 2)$ og $(8, 8)$. Finn a og b.

4.6.1 Eksponentialfunksjoner

EKSEMPEL *Sett opp en eksponentialfunksjon*

a) Du setter inn 5000 kr med 4 % rente per år. Sett opp en funksjon for beløpet etter x år.

b) En bakteriekultur har 100 bakterier og dobles hver time. Hvor mange er det etter 3 timer?

c) En bil er verdt 200 000 kr og taper 15 % av verdien hvert år. Sett opp en funksjon for verdien.

Løsning

a) $f(x) = 5000 \cdot 1{,}04^x$

b) $g(x) = 100 \cdot 2^x$, og $g(3) = 100 \cdot 8 = 800$ bakterier.

c) $V(x) = 200\,000 \cdot 0{,}85^x$

■

EKSEMPEL *Sammenlign veksten*

Sammenlign $L(x) = 100 + 20x$ og $E(x) = 100 \cdot 1{,}2^x$ for $x = 0, 1, 2$ og 5.

Løsning

x	0	1	2	5
$L(x)$	100	120	140	200
$E(x)$	100	120	144	249

Begge øker med 20 det første året, men deretter vokser E raskere, fordi den ganges med 1,2 hver gang. Før eller senere blir eksponentiell vekst større enn all lineær vekst.

■

4.64 Finn vekstfaktoren.

a) 3 % vekst

b) 12 % nedgang

c) 100 % vekst

4.65 Regn ut.

a) $f(4)$ når $f(x) = 50 \cdot 2^x$

b) $g(3)$ når $g(x) = 1000 \cdot 0{,}5^x$

c) $h(2)$ når $h(x) = 200 \cdot 1{,}1^x$

4.66 Sett opp en eksponentialfunksjon.

a) 20 000 kr med 5 % rente per år.

b) En båt til 300 000 kr som taper 8 % av verdien per år.

4.67 En eksponentialfunksjon har $f(0) = 400$ og $f(1) = 300$.

a) Finn vekstfaktoren.

b) Hvor mange prosent avtar funksjonen per steg?

c) Finn $f(2)$.

4.68 En mengde halveres hvert 5. år. Hvor mye er igjen av 64 g etter 20 år?

4.69 En verdi øker med 10 % i år og 10 % neste år. Hvor mange prosent har den økt til sammen?

4.70 Er veksten lineær eller eksponentiell?

a) $10, 15, 20, 25$

b) $10, 15, 22{,}5, 33{,}75$

4.71 *Python* Hva skriver programmet ut? Hva betyr svaret?

```
verdi = 100
aar = 0
while verdi < 200:
    verdi = verdi * 1.2
    aar = aar + 1
print(aar)
```

4.72 Tilbud A gir 1000 kr mer hvert år. Tilbud B gir 10 % mer hvert år. Begge starter på 10 000 kr. Hvilket gir mest etter 2 år?

4.7.1 Gjennomsnittlig vekstfart

EKSEMPEL *Gjennomsnittlig vekstfart*

a) Finn den gjennomsnittlige vekstfarten til $f(x) = x^2$ fra $x = 1$ til $x = 3$.

b) Klokka 06 var temperaturen $-2\,^\circ$ C, og klokka 12 var den $7\,^\circ$ C. Finn den gjennomsnittlige vekstfarten.

Løsning

a) $\dfrac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \dfrac{9 - 1}{2} = 4$

b) $\dfrac{7 - (-2)}{12 - 6} = \dfrac{9}{6} = 1{,}5\ ^\circ$ C per time.

4.73 Finn den gjennomsnittlige vekstfarten.

a) $f(x) = x^2$ fra $x = 0$ til $x = 4$

b) $g(x) = x^2 - 3x$ fra $x = 1$ til $x = 5$

c) $h(x) = 2^x$ fra $x = 1$ til $x = 3$

4.74 En bil kjører 45 km fra klokka 10 : 15 til 10 : 45. Finn gjennomsnittsfarten i km/h.

4.75 Temperaturen var $18\,^\circ$ C klokka 15 og $6\,^\circ$ C klokka 23. Finn den gjennomsnittlige vekstfarten.

4.76 Finn den gjennomsnittlige vekstfarten til $f(x) = -x^2 + 6x$ fra $x = 1$ til $x = 5$. Forklar svaret med symmetri.

4.77 Hva er feil? «Vekstfarten til $f(x) = x^3$ fra $x = -2$ til $x = 1$ er $\dfrac{1 - 8}{1 + 2}$.»

4.78 *Python* Hva skriver programmet ut?

```
t = [0, 1, 2, 3]
s = [0, 5, 20, 45]
for i in range(3):
    print(s[i+1] - s[i])
```

4.79 Vis at den gjennomsnittlige vekstfarten til $f(x) = 3x - 4$ er 3 over alle intervaller.

4.7.2 Momentan vekstfart

EKSEMPEL *Tilnærming med små h*

Finn den momentane vekstfarten til $f(x) = x^2$ i $x = 3$.

Løsning

$$\frac{(3 + h)^2 - 9}{h} = \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h$$

For $h = 0{,}1$ er det 6,1, for $h = 0{,}01$ er det 6,01, og så videre. Når h nærmer seg 0, nærmer det seg 6. Den momentane vekstfarten i $x = 3$ er 6.

4.80 Er det gjennomsnittlig eller momentan vekstfart?

a) Farten til en sprinter i målstreken.

b) En aksje steg 30 % på et år.

c) Stigningstallet til en sekant.

4.81 La $f(x) = x^2$.

a) Forenkle $\dfrac{f(4 + h) - f(4)}{h}$.

b) Finn den momentane vekstfarten i $x = 4$.

4.82 La $f(x) = x^2 + 2x$.

a) Forenkle $\dfrac{f(1 + h) - f(1)}{h}$.

b) Finn den momentane vekstfarten i $x = 1$.

4.83 Regn ut den gjennomsnittlige vekstfarten til $f(x) = x^2$ fra $x = 2$ til $x = 2{,}1$ og fra $x = 2$ til $x = 2{,}01$. Hva nærmer svarene seg?

4.84 Hva skriver programmet ut? Hva er den momentane vekstfarten?

Python

```
def f(x):
    return 3*x**2

for h in [0.1, 0.01]:
    print(round((f(1 + h) - f(1)) / h, 2))
```

4.85 Tegn grafen til $f(x) = x^2$, og tegn tangenten i $(1, 1)$ for hånd. Les av stigningstallet.

4.86 Hvorfor kan vi ikke sette inn $h = 0$ direkte i $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$?

4.8.1 Definisjonen av den deriverte

EKSEMPEL *Den deriverte av x i andre*

Finn $f'(x)$ når $f(x) = x^2$, og bruk den til å finne stigningstallet til tangenten i $x = 5$.

Løsning

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h \overset{h \to 0}{\to} 2x$$

Altså er $f'(x) = 2x$, og $f'(5) = 10$. ∎

EKSEMPEL *Flere funksjoner*

Finn den deriverte fra definisjonen.

a) $f(x) = 3x + 2$

b) $g(x) = x^2 + x$

c) $k(x) = 5$

Løsning

a) $\dfrac{3(x+h) + 2 - 3x - 2}{h} = \dfrac{3h}{h} = 3$, så $f'(x) = 3$.

b) $\dfrac{(x+h)^2 + (x+h) - x^2 - x}{h} = \dfrac{2xh + h^2 + h}{h} = 2x + h + 1 \to 2x + 1$, så $g'(x) = 2x + 1$.

c) $\dfrac{5-5}{h} = 0$, så $k'(x) = 0$. En konstant endrer seg ikke.

∎

4.87 Finn grenseverdien.

a) $\lim_{h \to 0}(7 - 2h)$

b) $\lim_{h \to 0} \dfrac{3h + h^2}{h}$

c) $\lim_{h \to 0}(4x + 2h)$

4.88 Finn den deriverte fra definisjonen.

a) $f(x) = 5x - 1$

b) $g(x) = x^2 - 4$

c) $k(x) = 3x^2$

4.89 Finn den deriverte av $f(x) = x^2 + 4x$ fra definisjonen.

4.90 Det er kjent at $f'(x) = 2x$ når $f(x) = x^2$.

a) Hva er stigningstallet til tangenten i $(-2, 4)$?

b) Hvor er stigningstallet til tangenten lik 6?

4.91 Hva er feil? «$f(x) = x^2$ gir $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{x^2 + h^2 - x^2}{h} = h \to 0$.»

4.92 Hva skriver programmet ut?

Python

```
def f(x):
    return x**2 + 4*x

h = 0.001
for x in [0, 1, 2]:
    print(round((f(x + h) - f(x)) / h, 2))
```

4.93 Finn den deriverte av $f(x) = x^3 + x$ fra definisjonen. Bruk at $(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$.

4.8.2 Derivasjonsregler

EKSEMPEL *Deriver polynomet*

Deriver $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 7$, og finn $f'(2)$.

Løsning

$$f'(x) = 2 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x + 4 - 0 = 6x^2 - 10x + 4$$

$f'(2) = 24 - 20 + 4 = 8$. ∎

EKSEMPEL *Finn tangenten*

Finn likningen for tangenten til $f(x) = x^2 - 3x$ i $x = 1$.

Løsning

$f(1) = 1 - 3 = -2$ og $f'(x) = 2x - 3$, så $f'(1) = -1$. Tangenten er

$$y - (-2) = -1(x - 1) \quad \Leftrightarrow \quad y = -x - 1$$

∎

4.94 Deriver.

a) $f(x) = 7x^2$

b) $g(x) = x^5 - 3x$

c) $h(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 9$

d) $k(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 5$

4.95 Deriver.

a) $f(x) = (x-2)^2$

b) $g(x) = x(x+3)$

c) $h(x) = (2x+1)(x-1)$

4.96 La $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Finn $f'(x)$, $f'(0)$ og $f'(3)$.

4.97 Finn likningen for tangenten.

a) $f(x) = x^2 + 1$ i $x = 2$

b) $g(x) = x^3$ i $x = -1$

4.98 I hvilke punkter er tangenten til $f(x) = x^3 - 12x$ vannrett?

4.99 En bil kjører $s(t) = t^2 + 10t$ meter på t sekunder. Finn farten etter 5 sekunder.

4.100 Hva er feil? «$f(x) = 3x^4 - 2$ gir $f'(x) = 12x^4 - 2$.»

4.101 Hva skriver programmet ut?

Python

```
def fd(x):
    return 3*x**2 - 6*x

for x in [0, 1, 2]:
    print(x, fd(x))
```

4.102 Finn punktet på grafen til $f(x) = x^2 + 2x$ der tangenten er parallell med $y = 6x - 1$.

4.8.3 Drøfting med den deriverte

EKSEMPEL *Drøft en tredjegradsfunksjon*

Finn topp- og bunnpunktene til $f(x) = x^3 - 3x$, og avgjør hvor f vokser og avtar.

Løsning

$f'(x) = 3(x-1)(x+1)$ er null for $x = -1$ og $x = 1$. Fortegnslinja:

	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
$x + 1$	$-$	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$

f vokser for $x < -1$ og $x > 1$, og avtar for $-1 < x < 1$. $f(-1) = 2$ og $f(1) = -2$, så toppunktet er $(-1, 2)$ og bunnpunktet $(1, -2)$.

■

EKSEMPEL *Størst volum*

Finn x som gir størst volum for esken $V(x) = x(12 - 2x)^2$, der $0 < x < 6$.

Løsning

$V'(x) = 12x^2 - 96x + 144 = 12(x^2 - 8x + 12) = 12(x - 2)(x - 6)$. I intervallet $0 < x < 6$ er $V'(x) = 0$ bare for $x = 2$. V' er positiv for $x < 2$ og negativ for $2 < x < 6$, så $x = 2$ gir et toppunkt. Det største volumet er $V(2) = 128\,\text{cm}^3$.

■

4.103 Finn bunnpunktet eller toppunktet.

a) $f(x) = x^2 + 4x - 1$

b) $g(x) = -x^2 + 6x$

4.104 La $f(x) = x^3 - 12x$.

a) Lag fortegnslinje for $f'(x)$.

b) Finn topp- og bunnpunktet.

c) Hvor er f avtakende?

4.105 La $f(x) = -x^3 + 3x$. Finn topp- og bunnpunktet.

4.106 Har funksjonen topp-, bunn- eller terrassepunkt i $x = 0$?

a) $f(x) = x^4$

b) $g(x) = -x^3$

c) $h(x) = x^3 + 3x^2$

4.107 Summen av to positive tall er 10. Finn tallene som gir størst produkt.

4.108 En bonde har 60 m gjerde og vil lage en innhegning mot en låvevegg (tre sider gjerde). Finn målene som gir størst areal.

4.109 En eske lages av en papplate på $30 \cdot 30$ cm ved å klippe ut kvadrater med side x i hjørnene. Volumet er $V(x) = x(30 - 2x)^2$. Vis at $V'(x) = 12(x - 5)(x - 15)$, og finn det største volumet.

4.110 Hva skriver programmet ut?

Python

```
best = 0
for x in range(16):
    V = x * (30 - 2*x)**2
    if V > best:
        best = V
        bx = x
print(bx, best)
```

4.111 Hva er feil? «$f(x) = x^3$ har $f'(0) = 0$, så $(0, 0)$ er et bunnpunkt.»

4.112 For hvilken verdi av a har $f(x) = x^2 + ax + 1$ bunnpunkt i $x = 3$?

Fasit

4.1.1 Funksjonsbegrepet

4.1
a) 3
b) $9-6+3=6$
c) $4+4+3=11$

4.2
a) 7
b) $4-3x=-8$, $x=4$

4.3
$x^2+2x-8=0$, $(x+4)(x-2)=0$, så $x=-4 \vee x=2$.

4.4
a) Ja, hver elev har én fødselsdato.
b) Nei, to elever kan ha samme fødselsdato.
c) Ja.

4.5
a) $x \geqslant 5$
b) $x \neq -4$
c) $x \leqslant 3$

4.6
a) $[3, \rightarrow\rangle$
b) $\langle\leftarrow, 0]$
c) $[1, 9]$

4.7
$D_P = [0, 24]$ og $V_P = [0, 2376]$.

4.8
$f(a+2) = 3a+4$ og $f(2a) = 6a-2$.

4.9
6 6

4.10
$x^2-5x=0$, så $x=0 \vee x=5$.

4.1.2 Grafer

4.11
$5, 0, -3, -4, -3, 0, 5$. Grafen er en parabel med bunnpunkt $(0, -4)$ og nullpunkter ± 2.

4.12
a) $(x-3)(x+2)=0$, så $x=3 \vee x=-2$.
b) $(0, -6)$

4.13
$x^2-2x-3=0$ gir $x=3 \vee x=-1$. Punktene er $(3, 9)$ og $(-1, 1)$.

4.14
$-1 < x < 3$

4.15
Nullpunktene er ± 2, og parabelen har toppunkt. $f(x) > 0$ for $-2 < x < 2$.

4.16
$x=4$ og $f(4)=-4$. Bunnpunktet er $(4, -4)$.

4.17
Bunnpunktet er $(-1, -1)$. Linja skjærer grafen i to punkter når $c > -1$.

4.18
-3 6, -2 0, -1 -4, 0 -6, 1 -6, 2 -4, 3 0.
Nullpunktene er -2 og 3.

4.19
Et punkt har to koordinater. Toppunktet er $(3, 9)$.

4.2.1 Lineære funksjoner

4.20
a) 3
b) -2
c) 2

4.21
a) $y = 4x-2$
b) $a=2$, $y=2x-1$
c) $a=-2$, $y=-2x-2$

4.22
$3x=9$, $x=3$, $y=3$. Punktet er $(3, 3)$.

4.23
$y-4=3(x-2)$, så $y=3x-2$.

4.24
a) $K(x) = 250x+300$
b) Stigningstallet 250 er prisen per måned, og konstantleddet 300 er innmeldingsavgiften.

4.25
Ja, stigningstallet er 2 mellom begge parene.

4.26
Skjæring med aksene: $(2, 0)$ og $(0, -6)$.
Arealet er $\dfrac{2 \cdot 6}{2} = 6$.

4.27
2.0 -1.0, altså $y = 2x-1$.

4.28
Parallelle når $k=4$. Skjæring i $x=2$: $2k+1=5$, så $k=2$.

4.3.1 Andregradsfunksjoner

4.29
a) Bunnpunkt, $(0, 2)$
b) Toppunkt, $(0, 5)$

4.30
a) $x=4 \vee x=-2$
b) $x=1$
c) $(1, -9)$

4.31
$x = -\dfrac{-4}{-2} = -2$ og $f(-2) = -4+8+1 = 5$. Toppunktet er $(-2, 5)$.

4.32
$x=2$ og $f(2)=8-16+3=-5$. Bunnpunktet er $(2, -5)$.

4.33
a) $t=1$, $h(1)=20$ m
b) $-5(t^2-2t-3)=0$ gir $t=3$ (og $t=-1$, som forkastes). Etter 3 sekunder.

4.34
$A(x) = x(18-x)$ har nullpunktene 0 og 18, så $x=9$. Kvadrat med side 9 m, areal 81 m^2.

4.35
$f(x) = a(x+1)(x-3)$, $f(0) = -3a = -6$, $a=2$. $f(x) = 2x^2-4x-6$.

4.36
$f(-2) = (-2)^2+4\cdot(-2) = 4-8 = -4$. Bunnpunktet er $(-2, -4)$.

4.37
0 0, 1 3, 2 4, 3 3, 4 0. Toppunktet er $(2, 4)$.

4.38
Bunnpunktet er i $x=3$, og $f(3)=c-9=0$ gir $c=9$.

4.3.2 Polynomfunksjoner av høyere grad

4.39
a) Grad 3: $0, 3, -3$
b) Grad 4: $0, 2, -2$
c) Grad 3: $1, -2, 4$

4.40
$-1 < x < 2$ og $x > 4$.

4.41
a) Mot $-\infty$ til venstre, mot $+\infty$ til høyre.
b) Mot $+\infty$ til venstre, mot $-\infty$ til høyre.
c) Mot $+\infty$ på begge sider.

4.42
$x(x^2-2x-3) = x(x-3)(x+1)$: $0, 3, -1$.

4.43
$x^2(x-1)-4(x-1) = (x^2-4)(x-1)$: $1, 2, -2$.

4.44
I $x=0$ er det et dobbelt nullpunkt: Grafen berører x-aksen og snur (toppunkt). I $x=3$ krysser den x-aksen.

4.45
$x(x-2)(x+3) = x^3+x^2-6x$

4.46
Høyst 5 nullpunkter og 4 topp- og bunnpunkter.

4.47
-2 -6, -1 0, 0 0, 1 0, 2 6. Én verdi er positiv.

4.4.1 Rasjonale funksjoner

4.48
a) $x \neq -1$. Asymptoter $x = -1$ og $y = 1$. Nullpunkt $x = 4$.
b) $x \neq 3$. Asymptoter $x = 3$ og $y = 2$. Nullpunkt $x = -3$.

4.49
$x = 2$ og $y = 0$.

4.50
$f(0) = -\frac{1}{2}$, så $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$.

4.51
$3x + 7 = 3(x + 2) + 1$, så $f(x) = 3 + \frac{1}{x+2}$.

4.52
Nei. $f(x) = x - 3$ for $x \neq -3$. Grafen er en linje med hull i $(-3, -6)$.

4.53
$b = 4$ og $a = 3$.

4.54
10 3.875, 100 3.071, 1000 3.007. Verdiene nærmer seg 3, den horisontale asymptoten.

4.55
$x = 1$ gjør nevneren null, og der er funksjonen ikke definert. Nullpunktet er der telleren er null, $x = -5$.

4.5.1 Potensfunksjoner

4.56
a) $2 \cdot 8 = 16$
b) 3
c) 2

4.57
a) Vokser stadig raskere.
b) Vokser stadig langsommere.
c) Avtar.

4.58
a) $9a = 18$, $a = 2$.
b) $4^b = 2$, $b = \frac{1}{2}$.

4.59
a) 9
b) 27
c) $\sqrt{3}$

4.60
$5^2 = 25$

4.61
f er en potensfunksjon (x er grunntallet), g en eksponentialfunksjon (x er eksponenten). $f(4) = 64$ og $g(4) = 81$.

4.62
1 2.0, 4 4.0, 9 6.0

4.63
$a = 2$, og $2 \cdot 8^b = 8$ gir $8^b = 4$, altså $2^{3b} = 2^2$ og $b = \frac{2}{3}$.

4.6.1 Eksponentialfunksjoner

4.64
a) 1,03
b) 0,88
c) 2

4.65
a) 800
b) 125
c) 242

4.66
a) $f(x) = 20\,000 \cdot 1{,}05^x$
b) $V(x) = 300\,000 \cdot 0{,}92^x$

4.67
a) 0,75
b) 25 %
c) $400 \cdot 0{,}75^2 = 225$

4.68
20 år er 4 halveringer: $64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 4$ g.

4.69
$1{,}1^2 = 1{,}21$, altså 21 %.

4.70
a) Lineær, +5 hver gang.
b) Eksponentiell, $\cdot\, 1{,}5$ hver gang.

4.71
4. $1{,}2^3 = 1{,}728$ og $1{,}2^4 = 2{,}0736$, så med 20 % vekst har verdien doblet seg etter 4 hele år.

4.72
A: 12 000 kr. B: $10\,000 \cdot 1{,}21 =$ 12 100 kr. B gir mest.

4.7.1 Gjennomsnittlig vekstfart

4.73
a) 4
b) $\frac{10 - (-2)}{4} = 3$
c) $\frac{8 - 2}{2} = 3$

4.74
$\frac{45\text{ km}}{0{,}5\text{ h}} = 90$ km/h

4.75
$\frac{6 - 18}{8} = -1{,}5$ °C per time.

4.76
$\frac{5 - 5}{4} = 0$. Parabelen er symmetrisk om $x = 3$, så $f(1) = f(5)$.

4.77
$f(-2) = -8$, ikke 8. Riktig er $\frac{1 - (-8)}{3} = 3$.

4.78
5, 15 og 25. Tidsstegene er 1, så det er den gjennomsnittlige farten i hvert sekund, og den øker.

4.79
$\frac{3x_2 - 4 - (3x_1 - 4)}{x_2 - x_1} = \frac{3(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = 3$

4.7.2 Momentan vekstfart

4.80
a) Momentan
b) Gjennomsnittlig
c) Gjennomsnittlig

4.81
a) $8 + h$
b) 8

4.82
a) $\frac{(1+h)^2 + 2(1+h) - 3}{h} = \frac{4h + h^2}{h} = 4 + h$
b) 4

4.83
$\frac{4{,}41 - 4}{0{,}1} = 4{,}1$ og $\frac{4{,}0401 - 4}{0{,}01} = 4{,}01$.
De nærmer seg 4.

4.84
6.3 og 6.03. Den momentane vekstfarten i $x = 1$ er 6.

4.85
Tangenten går gjennom $(1, 1)$ og for eksempel $(2, 3)$. Stigningstallet er 2.

4.86
Da blir både teller og nevner 0, og $\frac{0}{0}$ er ikke definert. Vi må forenkle og dele på h først.

4.8.1 Definisjonen av den deriverte

4.87
a) 7
b) 3
c) 4x

4.88
a) 5
b) 2x
c) 6x

4.89
$\frac{2xh + h^2 + 4h}{h} = 2x + h + 4 \to 2x + 4$

4.90
a) -4
b) $2x = 6$ gir $x = 3$, i punktet $(3, 9)$.

4.91
$(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$, ikke $x^2 + h^2$. Riktig grense er $2x$.

4.92
`4.0`, `6.0` og `8.0`, altså $f'(x) = 2x + 4$.

4.93
$\frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 + h}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2 + 1 \to 3x^2 + 1$

4.8.2 Derivasjonsregler

4.94
a) $14x$
b) $5x^4 - 3$
c) $12x^2 - 4x + 1$
d) x^2

4.95
a) $x^2 - 4x + 4$ gir $2x - 4$.
b) $x^2 + 3x$ gir $2x + 3$.
c) $2x^2 - x - 1$ gir $4x - 1$.

4.96
$f'(x) = 3x^2 - 6x$, $f'(0) = 0$ og $f'(3) = 9$.

4.97
a) $f(2) = 5$, $f'(2) = 4$: $y = 4x - 3$
b) $g(-1) = -1$, $g'(-1) = 3$: $y = 3x + 2$

4.98
$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0$ gir $x = \pm 2$. Punktene er $(2, -16)$ og $(-2, 16)$.

4.99
$v(t) = s'(t) = 2t + 10$, så $v(5) = 20$ m/s.

4.100
Eksponenten skal bli én mindre, og konstanten blir 0. Riktig er $f'(x) = 12x^3$.

4.101
`0 0, 1 -3, 2 0.`

4.102
$2x + 2 = 6$ gir $x = 2$, og $f(2) = 8$. Punktet er $(2, 8)$.

4.8.3 Drøfting med den deriverte

4.103
a) $f'(x) = 2x + 4 = 0$ gir $x = -2$. Bunnpunkt $(-2, -5)$.
b) $g'(x) = -2x + 6 = 0$ gir $x = 3$. Toppunkt $(3, 9)$.

4.104
a) $f'(x) = 3(x-2)(x+2)$: $+$ for $x < -2$, $-$ for $-2 < x < 2$, $+$ for $x > 2$.
b) Toppunkt $(-2, 16)$, bunnpunkt $(2, -16)$.
c) $-2 < x < 2$

4.105
$f'(x) = -3x^2 + 3 = -3(x-1)(x+1)$: $-$, $+$, $-$. Bunnpunkt $(-1, -2)$, toppunkt $(1, 2)$.

4.106
a) Bunnpunkt ($f'(x) = 4x^3$ skifter fra $-$ til $+$).
b) Terrassepunkt ($g'(x) = -3x^2 \leqslant 0$ på begge sider).
c) Bunnpunkt ($h'(x) = 3x(x+2)$ skifter fra $-$ til $+$ i 0).

4.107
$P(x) = x(10 - x)$, $P'(x) = 10 - 2x = 0$ gir $x = 5$. Tallene er 5 og 5.

4.108
$A(x) = x(60 - 2x)$, $A'(x) = 60 - 4x = 0$ gir $x = 15$. Målene er 15 m og 30 m, og arealet er 450 m^2.

4.109
$V(x) = 4x^3 - 120x^2 + 900x$, $V'(x) = 12x^2 - 240x + 900 = 12(x^2 - 20x + 75) = 12(x-5)(x-15)$. Med $0 < x < 15$ er toppunktet $x = 5$, og $V(5) = 5 \cdot 400 = 2000$ cm^3.

4.110
`5 2000`

4.111
$f'(x) = 3x^2$ er positiv på begge sider av 0, så det er ingen fortegnsskifte. $(0, 0)$ er et terrassepunkt.

4.112
$f'(3) = 6 + a = 0$, så $a = -6$.