3 Likninger

Overskriftene viser til delkapitlene i boka. Først kommer et formelark for hele kapittelet. Under hver overskrift står gjennomregnede eksempler med løsning, og deretter oppgaver du skal løse uten hjelpemidler, som på del 1 av eksamen. Fasiten står bakerst.

Formelark

LINEÆRE LIKNINGER OG FORMLER

Samme på begge sider

$$5x - 3 = 2x + 9 \Leftrightarrow 3x = 12$$

Snu en formel

$$v = \frac{s}{t} \Leftrightarrow t = \frac{s}{v}$$

- Gjør det samme med hele siden. Sett prøve.

ANDREGRADSLIKNINGER

Uten førstegradsledd

$$x^2 = k \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{k}$$

Produktregelen

$$(x - p)(x - q) = 0 \Leftrightarrow x = p \vee x = q$$

abc-formelen

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Diskriminanten

$D > 0 : 2 \qquad D = 0 : 1 \qquad D < 0 : 0$

Nullpunktfaktorisering

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- Ikke del på x. Faktoriser.
- Husk a foran parentesene i nullpunktfaktoriseringen.

EKVIVALENS

Kvadrering

$$A = B \Rightarrow A^2 = B^2$$

Brøklikning

$$\text{nevneren} \neq 0$$

- Sett prøve etter kvadrering, og sjekk at ingen nevner blir null.

POLYNOMDIVISJON OG HØYERE GRAD

Restsetningen

$$P(x) : (x - a) \text{ gir rest } P(a)$$

Faktorsetningen

$$P(a) = 0 \Leftrightarrow (x - a) \text{ er en faktor}$$

- Prøv tallene som går opp i konstantleddet, del, og løs andregradslikningen.

3.1.1 Lineære likninger

EKSEMPEL *Løs og sett prøve*

Løs likningen $5x - 3 = 2x + 9$, og sett prøve.

Løsning

$$\begin{aligned} 5x - 3 &= 2x + 9 \\ 5x - 2x &= 9 + 3 \\ 3x &= 12 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Prøve: Venstre side er $5 \cdot 4 - 3 = 17$, og høyre side er $2 \cdot 4 + 9 = 17$. Sidene er like, så $x = 4$ er riktig. ▪

EKSEMPEL *Likning med parenteser*

Løs $3(x - 2) - 2(x + 1) = 4$.

Løsning

$$\begin{aligned} 3x - 6 - 2x - 2 &= 4 \\ x - 8 &= 4 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

▪

EKSEMPEL *Likning med brøker*

Løs likningene.

a) $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 7$

b) $\frac{x+1}{2} - \frac{x-3}{5} = 2$

Løsning

a) Vi ganger med 12: $4x + 3x = 84$, så $7x = 84$ og $x = 12$.

b) Vi ganger med 10:

$$\begin{aligned} 5(x + 1) - 2(x - 3) &= 20 \\ 5x + 5 - 2x + 6 &= 20 \\ 3x &= 9 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

▪

EKSEMPEL *Hvor mange løsninger?*

Hvor mange løsninger har likningen?

a) $2(x + 3) = 2x + 5$

b) $2(x + 3) = 2x + 6$

Løsning

a) $2x + 6 = 2x + 5$ gir $6 = 5$, som er usant. Likningen har ingen løsning.

b) $2x + 6 = 2x + 6$ er sant for alle x. Det er en identitet, med uendelig mange løsninger. ▪

3.1 Løs likningene.

a) $5x - 4 = 21$

b) $7 - 2x = 1$

c) $3x + 2 = x - 6$

d) $4(x - 1) = 2x + 6$

3.2 Løs likningene.

a) $\frac{x}{4} - 1 = 2$

b) $\frac{x}{2} + \frac{x}{5} = 7$

c) $\frac{x-1}{3} = \frac{x+3}{5}$

3.3 Løs $2(x + 3) - 3(x - 1) = 5$.

3.4 Løs $\frac{x+2}{3} - \frac{x-1}{2} = 1$.

3.5 Hvor mange løsninger har likningen?

a) $3(x - 1) = 3x - 3$

b) $2x + 5 = 2(x + 1)$

c) $4x = x$

3.6 Er $x = -2$ en løsning av $3x + 8 = x + 4$? Sett prøve.

3.7 Tre venner deler en regning på 650 kr. Ola betaler 50 kr mer enn Kari, og Per betaler dobbelt så mye som Kari. Hvor mye betaler Kari?

3.8 Abonnement A koster 149 kr pluss 0,50 kr per minutt. Abonnement B koster 99 kr pluss 1 kr per minutt. Ved hvor mange minutter koster de like mye?

3.9 En mor er 30 år eldre enn sønnen. Om 10 år er hun tre ganger så gammel som ham. Hvor gammel er sønnen nå?

3.10 Hva er feil? Hva er riktig løsning?

$3 - (x - 4) = 2 \quad \Rightarrow \quad 3 - x - 4 = 2 \quad \Rightarrow \quad x = -3$

3.11 Hva skriver programmet ut?

Python

```
for x in range(0, 20):
    if 4*x - 7 == 2*x + 9:
        print(x)
```

3.12 For hvilken verdi av a har $ax - 3 = 2x + 1$ ingen løsning?

3.13 Summen av fire oddetall som følger etter hverandre, er 72. Hvilke tall er det?

3.14 Lise har fått 4, 5 og 3 på tre prøver. Hva må hun få på den fjerde for at gjennomsnittet skal bli 4,5?

3.2.1 Formelregning

EKSEMPEL *Snu enkle formler*

a) Løs $v = \frac{s}{t}$ med hensyn på t.

b) Løs $O = 2l + 2b$ med hensyn på b.

c) Løs $A = \frac{g \cdot h}{2}$ med hensyn på h.

Løsning

a) $vt = s$, så $t = \frac{s}{v}$.

b) $2b = O - 2l$, så $b = \frac{O - 2l}{2}$.

c) $2A = gh$, så $h = \frac{2A}{g}$.

Sjekk a) med tall: $s = 100$ og $t = 20$ gir $v = 5$, og $\frac{100}{5} = 20$.

■

EKSEMPEL *Kvadrat og rot*

a) Løs $A = \pi r^2$ med hensyn på r.

b) Løs $K = \frac{mv^2}{2}$ med hensyn på v.

c) Løs $T = 2\sqrt{L}$ med hensyn på L.

Løsning

a) $r^2 = \frac{A}{\pi}$, så $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$.

b) $v^2 = \frac{2K}{m}$, så $v = \sqrt{\frac{2K}{m}}$.

c) $\sqrt{L} = \frac{T}{2}$, så $L = \frac{T^2}{4}$.

■

3.15 Løs formelen med hensyn på variabelen i parentes.

a) $F = m \cdot a$ (a)

b) $v = \frac{s}{t}$ (t)

c) $U = R \cdot I$ (I)

3.16 Løs formelen med hensyn på variabelen i parentes.

a) $P = 2(l + b)$ (b)

b) $y = 3x - 6$ (x)

c) $K = 200 + 60n$ (n)

3.17 Løs formelen med hensyn på variabelen i parentes. Variablene er positive.

a) $A = s^2$ (s)

b) $V = s^3$ (s)

c) $O = 4\pi r^2$ (r)

d) $s = \frac{1}{2}at^2$ (t)

3.18 Bruk $C = \frac{F - 32}{1{,}8}$ og gjør om $86\,^\circ$ F til Celsius.

3.19 Martin løser $v = \frac{s}{t}$ med hensyn på t og får $t = \frac{v}{s}$. Sjekk med tall, og finn riktig formel.

3.20 To motstander koblet i parallell har samlet motstand R gitt ved $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

a) Løs formelen med hensyn på R.

b) Finn R når $R_1 = 6$ og $R_2 = 3$.

3.21 Hva skriver programmet ut?

Python

```
def side(O):
    return O / 4

print(side(20))
```

3.22 Kroppsmasseindeksen er $BMI = \frac{m}{h^2}$.

a) Løs formelen med hensyn på h.

b) Hvor høy er en person som veier 72 kg og har BMI 25? Du kan bruke kalkulator.

3.23 Løs formelen $A = \frac{(a + b)h}{2}$ med hensyn på b.

3.24 Løs $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ med hensyn på L.

3.25 Løs $y = \frac{x + 1}{x - 1}$ med hensyn på x.

3.3.1 Andregradslikninger

EKSEMPEL *Ufullstendige likninger*

Løs likningene.

a) $2x^2 - 18 = 0$

b) $x^2 = 5$

c) $3x^2 - 12x = 0$

d) $x^2 + 4 = 0$

Løsning

a) $x^2 = 9$, så $x = 3 \vee x = -3$.

b) $x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}$.

c) $3x(x - 4) = 0$, så $x = 0 \vee x = 4$.

d) $x^2 = -4$. Et kvadrat er aldri negativt, så likningen har ingen løsning.

■

EKSEMPEL *Løs ved å faktorisere*

Løs $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Løsning

$-2 + (-3) = -5$ og $(-2) \cdot (-3) = 6$, så

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$$

■

EKSEMPEL *Fullstendige kvadraters metode*

Løs likningene.

a) $x^2 + 6x - 7 = 0$

b) $x^2 - 2x - 1 = 0$

Løsning

a)

$$\begin{aligned} x^2 + 6x &= 7 \\ x^2 + 6x + 9 &= 7 + 9 \\ (x + 3)^2 &= 16 \\ x + 3 = 4 &\vee x + 3 = -4 \\ x = 1 &\vee x = -7 \end{aligned}$$

b)

$$x^2 - 2x + 1 = 1 + 1$$
$$(x-1)^2 = 2$$
$$x = 1 + \sqrt{2} \vee x = 1 - \sqrt{2}$$

■

3.26 Løs likningene.

a) $x^2 = 25$

b) $x^2 - 81 = 0$

c) $4x^2 = 36$

d) $x^2 = 10$

3.27 Løs likningene.

a) $2x^2 - 50 = 0$

b) $x^2 + 1 = 0$

c) $3x^2 = 0$

3.28 Løs likningene.

a) $x^2 - 6x = 0$

b) $5x^2 + 15x = 0$

c) $x^2 = 7x$

3.29 Løs ved å faktorisere.

a) $x^2 + 5x + 6 = 0$

b) $x^2 - x - 2 = 0$

c) $x^2 - 8x + 15 = 0$

d) $x^2 + 2x - 15 = 0$

3.30 Løs $x^2 - 10x + 25 = 0$.

3.31 Løs med fullstendige kvadraters metode.

a) $x^2 + 8x + 7 = 0$

b) $x^2 - 4x - 1 = 0$

3.32 Løs $(x-2)^2 = 9$.

3.33 Løs likningene.

a) $(x+1)(x-4) = 0$

b) $x(x-3)(x+2) = 0$

3.34 Ola løser $x^2 - 4 = 0$ og får $x = 2$. Hva har han glemt?

3.35 Et rektangel er 2 cm lengre enn det er bredt, og arealet er 48 cm^2. Finn bredden.

3.36 Hva skriver programmet ut?

Python

```
for x in range(-10, 11):
    if x**2 - x - 12 == 0:
        print(x)
```

3.37 To positive tall har differansen 2 og produktet 24. Finn tallene.

3.38 Løs $(x-1)^2 = 4(x-1)$ uten å gange ut.

3.4.1 abc-formelen

EKSEMPEL *Bruk abc-formelen*

Løs likningene.

a) $2x^2 - 3x - 2 = 0$

b) $x^2 + 2x - 1 = 0$

Løsning

a) $a = 2$, $b = -3$, $c = -2$:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \vee x = -\frac{1}{2}$$

b) $a = 1$, $b = 2$, $c = -1$:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

■

EKSEMPEL *Antall løsninger*

Hvor mange løsninger har likningen?

a) $x^2 - 6x + 9 = 0$

b) $x^2 + 2x + 5 = 0$

Løsning

a) $D = 36 - 36 = 0$: én løsning, $x = 3$. (Venstresiden er $(x-3)^2$.)

b) $D = 4 - 20 = -16 < 0$: ingen løsning.

■

3.39 Løs med abc-formelen.

a) $x^2 - 6x + 8 = 0$

b) $2x^2 - 5x + 2 = 0$

c) $x^2 + 2x - 8 = 0$

3.40 Løs med abc-formelen.

a) $3x^2 + 5x - 2 = 0$

b) $6x^2 - x - 1 = 0$

3.41 Løs, og svar eksakt.

a) $x^2 - 2x - 2 = 0$

b) $x^2 + 6x + 4 = 0$

3.42 Bruk diskriminanten og finn antall løsninger.

a) $x^2 - 4x + 5 = 0$

b) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

c) $x^2 - 3x - 10 = 0$

3.43 For hvilke verdier av k har $x^2 - kx + 4 = 0$ nøyaktig én løsning?

3.44 For hvilke verdier av c har $x^2 + 2x + c = 0$ ingen løsning?

3.45 Høyden til en ball er $h = -5t^2 + 10t + 2$ meter. Når er ballen 7 meter over bakken? Hva betyr det at det bare er én løsning?

3.46 Et rektangel har omkrets 20 cm og areal 21 cm^2. Finn sidene.

3.47 Hva er feil? Hva er løsningene?

$$2x^2 + 3x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 16}}{4}$$

3.48 Hva skriver programmet ut?

Python

```
from math import sqrt
a = 1
b = -6
c = 9
D = b**2 - 4*a*c
print(D, (-b + sqrt(D)) / (2*a))
```

3.49 Uten å løse likningen: Finn summen og produktet av løsningene til $2x^2 - 6x + 1 = 0$.

3.50 Løs $x^2 = x + 1$. Svar eksakt.

3.51 Bruk abc-formelen på $ax^2 + bx = 0$ (altså $c = 0$), og vis at løsningene er $x = 0$ og $x = -\frac{b}{a}$.

3.5.1 Ekvivalens og falske løsninger

EKSEMPEL *Rotlikning med falsk løsning*

Løs $\sqrt{x+2} = x$.

Løsning

$$\begin{aligned} \sqrt{x+2} &= x \\ x + 2 &= x^2 \quad (\Rightarrow) \\ x^2 - x - 2 &= 0 \\ (x-2)(x+1) &= 0 \end{aligned}$$

Prøve: $x = 2$ gir $\sqrt{4} = 2$, som stemmer. $x = -1$ gir $\sqrt{1} = 1$ på venstre side, men -1 på høyre side. Det stemmer ikke. Likningen har bare løsningen $x = 2$, og $x = -1$ er en falsk løsning. ■

EKSEMPEL *Brøklikninger*

Løs likningene.

a) $\frac{x+1}{x-2} = 4$

b) $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1} + 2$

Løsning

a) $x \neq 2$. Vi ganger med $x - 2$: $x + 1 = 4x - 8$, så $3x = 9$ og $x = 3$. Det er ikke 2, så $x = 3$ er en løsning.

b) $x \neq 1$. Vi ganger med $x - 1$: $x = 1 + 2(x - 1) = 2x - 1$, så $x = 1$. Men $x = 1$ gjør nevneren null, så det er en falsk løsning. Likningen har ingen løsning. ■

3.52 Sett inn $\Rightarrow$ eller $\Leftrightarrow$.

a) $x = -2 \quad \square \quad x^2 = 4$

b) $3x = 12 \quad \square \quad x = 4$

c) $x = 1 \quad \square \quad x^2 = x$

3.53 Løs likningene.

a) $\sqrt{x} = 4$

b) $\sqrt{x - 1} = 3$

c) $\sqrt{2x} = -2$

3.54 Løs likningene, og forkast falske løsninger.

a) $\sqrt{x + 12} = x$

b) $\sqrt{3x + 4} = x$

3.55 Løs $x + \sqrt{x} = 6$.

3.56 Løs likningene.

a) $\frac{3}{x+1} = 1$

b) $\frac{2x+1}{x-3} = 3$

c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = 3$

3.57 Har likningen løsninger?

a) $\frac{x}{x-2} = \frac{2}{x-2}$

b) $\frac{x^2 - 9}{x+3} = 2$

3.58 Hva er feil? Hva er alle løsningene?

$$x^3 = 4x \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$$

3.59 Hva skriver programmet ut? Hvilken løsning er falsk?

Python

```
from math import sqrt
for x in [4, -3]:
    print(x, sqrt(x + 12) == x)
```

3.60 Forklar hvorfor $x = -1$ er en falsk løsning av $\sqrt{x+2} = x$.

3.61 Løs $\sqrt{x+5} = x - 1$.

3.6.1 Nullpunktfaktorisering

EKSEMPEL *Faktoriser med nullpunktene*

Faktoriser.

a) $2x^2 - 3x - 2$

b) $x^2 - 2x - 1$

Løsning

a) $2x^2 - 3x - 2 = 0$ gir $x = 2 \vee x = -\frac{1}{2}$ (se 3.4.1). Altså er

$$2x^2 - 3x - 2 = 2(x-2)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x-2)(2x+1)$$

b) $x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Altså er

$$x^2 - 2x - 1 = \left(x - 1 - \sqrt{2}\right)\left(x - 1 + \sqrt{2}\right)$$

■

EKSEMPEL *Forkort brøken*

Forkort $\dfrac{x^2 + x - 6}{2x^2 - 3x - 2}$.

Løsning

$$\frac{x^2 + x - 6}{2x^2 - 3x - 2} = \frac{(x+3)(x-2)}{(x-2)(2x+1)} = \frac{x+3}{2x+1}$$

■

3.62 Faktoriser.

a) $x^2 - 3x - 10$

b) $x^2 + 8x + 15$

c) $2x^2 - x - 1$

3.63 Faktoriser så langt som mulig.

a) $3x^2 + 6x - 9$

b) $4x^2 - 4x + 1$

c) $2x^2 - 18$

3.64 Faktoriser $x^2 - 2x - 2$.

3.65 Kan uttrykket faktoriseres?

a) $x^2 + 2x + 3$

b) $x^2 - 2x + 1$

3.66 Forkort.

a) $\dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$

b) $\dfrac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$

c) $\dfrac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 - 4}$

3.67 Finn et andregradsuttrykk med nullpunktene 3 og -1 og med $a = 2$. Skriv det ganget ut.

3.68 Finn et andregradsuttrykk med hele tall som koeffisienter og nullpunktene $\dfrac{1}{2}$ og 4.

3.69 Hva er feil? $3x^2 - 3 = (x - 1)(x + 1)$

3.70 Hva skriver programmet ut? Faktoriser $2x^2 + x - 6$.

Python

```
from math import sqrt
a = 2
b = 1
c = -6
D = b**2 - 4*a*c
x1 = (-b + sqrt(D)) / (2*a)
x2 = (-b - sqrt(D)) / (2*a)
print(x1, x2)
```

3.71 Finn c slik at $x^2 + 6x + c = (x + 3)^2$.

3.72 Forklar hvorfor $ax^2 + bx + c$ ikke kan faktoriseres i lineære faktorer når $D < 0$.

3.7.1 Polynomdivisjon

EKSEMPEL *Del polynomene*

Utfør divisjonen.

a) $(x^2 + 5x + 6) : (x + 2)$

b) $(2x^3 + 3x^2 - 1) : (x + 1)$

Løsning

a) $x^2 : x = x$, og $x(x + 2) = x^2 + 2x$. Igjen: $3x + 6$. $3x : x = 3$, og $3(x + 2) = 3x + 6$. Igjen: 0. Svaret er $x + 3$.

b) $2x^3 : x = 2x^2$, og $2x^2(x + 1) = 2x^3 + 2x^2$. Igjen: $x^2 + 0x - 1$. $x^2 : x = x$, og $x(x + 1) = x^2 + x$. Igjen: $-x - 1$. $-x : x = -1$, og $-1(x + 1) = -x - 1$. Igjen: 0. Svaret er $2x^2 + x - 1$.

■

EKSEMPEL *Divisjon med rest*

Utfør divisjonen $(x^2 + 3x + 5) : (x + 1)$.

Løsning

$x^2 : x = x$, og $x(x + 1) = x^2 + x$. Igjen: $2x + 5$. $2x : x = 2$, og $2(x + 1) = 2x + 2$. Igjen: 3. Altså er

$$\frac{x^2 + 3x + 5}{x + 1} = x + 2 + \frac{3}{x + 1}$$

■

3.73 Utfør divisjonen.

a) $(x^2 + 8x + 12) : (x + 2)$

b) $(x^2 - 9) : (x - 3)$

c) $(x^2 - 3x - 10) : (x + 2)$

3.74 Utfør divisjonen.

a) $(6x^2 + x - 2) : (2x - 1)$

b) $(x^3 + 3x^2 - x - 3) : (x + 3)$

3.75 Utfør divisjonen.

a) $(x^3 - 27) : (x - 3)$

b) $(x^3 + 1) : (x + 1)$

3.76 Utfør divisjonen $(x^2 + 5x + 1) : (x - 1)$, og skriv svaret som et polynom pluss en brøk.

3.77 Finn resten uten å dele, når $P(x) = x^3 - 2x + 5$ deles på

a) $x - 2$

b) $x + 1$

3.78 Er $x + 2$ en faktor i $x^3 + 8$?

3.79 Hva er feil i første steg av $(x^2 - 5x + 6) : (x - 3)$?

«$x(x - 3) = x^2 - 3x$. Jeg trekker fra og får $-8x + 6$.»

3.80 Hva skriver programmet ut? For hvilke a går $(x^3 + x^2 - 4x - 4) : (x - a)$ opp?

Python

```
for a in [-2, -1, 1, 2]:
    print(a, a**3 + a**2 - 4*a - 4)
```

3.81 Utfør divisjonen $(x^4 - 1) : (x^2 + 1)$.

3.82 Finn a slik at divisjonen $(x^2 + ax + 6) : (x + 2)$ går opp.

3.7.2 Likninger av høyere grad

EKSEMPEL *Løs en tredjegradslikning*

Løs $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$.

Løsning

$P(1) = 1 - 3 - 4 + 12 = 6$ og $P(2) = 8 - 12 - 8 + 12 = 0$. Altså er $x - 2$ en faktor. Polynomdivisjon gir

$$(x^3 - 3x^2 - 4x + 12) : (x - 2) = x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$$

Likningen er $(x - 2)(x - 3)(x + 2) = 0$, så $x = 2 \vee x = 3 \vee x = -2$.

(Her går det også med gruppering: $x^2(x - 3) - 4(x - 3) = (x^2 - 4)(x - 3)$.)

■

EKSEMPEL *Fjerdegradslikning*

Løs $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Løsning

$u^2 - 5u + 4 = (u - 1)(u - 4) = 0$, så $u = 1 \vee u = 4$. Det gir $x^2 = 1$ eller $x^2 = 4$, altså

$$x = 1 \vee x = -1 \vee x = 2 \vee x = -2$$

■

3.83 Løs likningene.

a) $x^3 - x = 0$

b) $x^3 + 4x^2 = 0$

c) $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

3.84 Løs $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ ved gruppering.

3.85 Løs likningene med polynomdivisjon.

a) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$

b) $x^3 - 7x - 6 = 0$

3.86 Løs likningene.

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

b) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

3.87 Løs $x^3 = 8$.

3.88 For hvilken verdi av k er $x + 1$ en faktor i $x^3 + kx^2 + 4$?

3.89 Hva skriver programmet ut?

Python

```
for x in range(-5, 6):
    if x**3 - 7*x - 6 == 0:
        print(x)
```

3.90 Et tall pluss tredjepotensen av tallet er 10. Finn tallet.

3.91 Faktoriser $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ fullstendig.

3.92 Hvor mange løsninger kan en tredjegradslikning høyst ha? Begrunn med faktorsetningen.

Fasit

3.1.1 Lineære likninger

3.1
a) $x = 5$
b) $x = 3$
c) $x = -4$
d) $x = 5$

3.2
a) $x = 12$
b) $5x + 2x = 70$, $x = 10$
c) $5(x-1) = 3(x+3)$, $2x = 14$, $x = 7$

3.3
$2x + 6 - 3x + 3 = 5$, så $-x = -4$ og $x = 4$.

3.4
$2(x+2) - 3(x-1) = 6$, så $-x + 7 = 6$ og $x = 1$.

3.5
a) Uendelig mange (identitet)
b) Ingen ($5 = 2$)
c) Én, $x = 0$

3.6
Venstre side: $-6 + 8 = 2$. Høyre side: $-2 + 4 = 2$. Ja.

3.7
$x + (x + 50) + 2x = 650$, så $4x = 600$ og $x = 150$ kr.

3.8
$149 + 0{,}5\,x = 99 + x$, så $0{,}5\,x = 50$ og $x = 100$ minutter.

3.9
$x + 40 = 3(x + 10)$, så $2x = 10$ og $x = 5$ år.

3.10
$-(x-4) = -x + 4$. Riktig: $3 - x + 4 = 2$, så $x = 5$.

3.11
8, løsningen av $4x - 7 = 2x + 9$.

3.12
$(a-2)x = 4$. Ingen løsning når $a = 2$.

3.13
$x + (x+2) + (x+4) + (x+6) = 72$, så $x = 15$. Tallene er 15, 17, 19 og 21.

3.14
$\dfrac{4+5+3+x}{4} = 4{,}5$, så $12 + x = 18$ og $x = 6$.

3.2.1 Formelregning

3.15
a) $a = \dfrac{F}{m}$
b) $t = \dfrac{s}{v}$
c) $I = \dfrac{U}{R}$

3.16
a) $b = \dfrac{P}{2} - l$
b) $x = \dfrac{y+6}{3}$
c) $n = \dfrac{K - 200}{60}$

3.17
a) $s = \sqrt{A}$
b) $s = \sqrt[3]{V}$
c) $r = \sqrt{\dfrac{O}{4\pi}}$
d) $t = \sqrt{\dfrac{2s}{a}}$

3.18
$\dfrac{86-32}{1{,}8} = \dfrac{54}{1{,}8} = 30\,^\circ\,\mathrm{C}$

3.19
Med $s = 100$ og $t = 20$ er $v = 5$, men $\dfrac{v}{s} = 0{,}05$. Riktig er $t = \dfrac{s}{v} = 20$.

3.20
a) $R = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$
b) $R = \dfrac{18}{9} = 2$

3.21
5.0. Funksjonen finner siden i et kvadrat med omkrets 0.

3.22
a) $h = \sqrt{\dfrac{m}{BMI}}$
b) $h = \sqrt{\dfrac{72}{25}} = \sqrt{2{,}88} \approx 1{,}70$ m

3.23
$b = \dfrac{2A}{h} - a$

3.24
$\sqrt{\dfrac{L}{g}} = \dfrac{T}{2\pi}$, så $L = \dfrac{gT^2}{4\pi^2}$.

3.25
$y(x-1) = x + 1$, $yx - x = y + 1$,
$x(y-1) = y + 1$, så $x = \dfrac{y+1}{y-1}$.

3.3.1 Andregradslikninger

3.26
a) $x = \pm 5$
b) $x = \pm 9$
c) $x = \pm 3$
d) $x = \pm\sqrt{10}$

3.27
a) $x = \pm 5$
b) Ingen løsning
c) $x = 0$

3.28
a) $x = 0 \vee x = 6$
b) $x = 0 \vee x = -3$
c) $x = 0 \vee x = 7$

3.29
a) $x = -2 \vee x = -3$
b) $x = 2 \vee x = -1$
c) $x = 3 \vee x = 5$
d) $x = 3 \vee x = -5$

3.30
$(x-5)^2 = 0$, så $x = 5$.

3.31
a) $(x+4)^2 = 9$, så $x = -1 \vee x = -7$.
b) $(x-2)^2 = 5$, så $x = 2 \pm \sqrt{5}$.

3.32
$x - 2 = \pm 3$, så $x = 5 \vee x = -1$.

3.33
a) $x = -1 \vee x = 4$
b) $x = 0 \vee x = 3 \vee x = -2$

3.34
Den negative løsningen. $x = 2 \vee x = -2$.

3.35
$x(x+2) = 48$ gir $x^2 + 2x - 48 = 0$, $(x+8)(x-6) = 0$. Bredden er 6 cm.

3.36
-3 og 4.

3.37
$x(x+2) = 24$ gir $x = 4$ (den negative løsningen -6 forkastes). Tallene er 4 og 6.

3.38
$(x-1)(x-1-4) = 0$, så $x = 1 \vee x = 5$.

3.4.1 abc-formelen

3.39
a) $x = 2 \vee x = 4$
b) $x = 2 \vee x = \dfrac{1}{2}$
c) $x = 2 \vee x = -4$

3.40
a) $x = \dfrac{-5 \pm 7}{6}$, så $x = \dfrac{1}{3} \vee x = -2$.
b) $x = \dfrac{1 \pm 5}{12}$, så $x = \dfrac{1}{2} \vee x = -\dfrac{1}{3}$.

3.41
a) $x = 1 \pm \sqrt{3}$
b) $x = -3 \pm \sqrt{5}$

3.42
a) $D = -4$: ingen
b) $D = 0$: én
c) $D = 49$: to

3.43
$D = k^2 - 16 = 0$, så $k = 4 \vee k = -4$.

3.44
$D = 4 - 4c < 0$ når $c > 1$.

3.45
$5t^2 - 10t + 5 = 0$, $t^2 - 2t + 1 = 0$, $(t-1)^2 = 0$, så $t = 1$. Ballen når så vidt 7 meter, i toppunktet.

3.46
Sidene er x og $10 - x$. $x(10-x) = 21$ gir $x^2 - 10x + 21 = 0$, så $x = 3 \vee x = 7$. Sidene er 3 cm og 7 cm.

3.47
$c = -2$, så $-4ac = +16$. Riktig er $x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4}$, altså $x = \frac{1}{2} \vee x = -2$.

3.48
`0 3.0`. Diskriminanten er 0, og den eneste løsningen er 3.

3.49
Summen er $-\frac{b}{a} = 3$, og produktet er $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$.

3.50
$x^2 - x - 1 = 0$ gir $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

3.51
$D = b^2$, så $x = \frac{-b \pm b}{2a}$. Det gir $x = 0$ og $x = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$.

3.5.1 Ekvivalens og falske løsninger

3.52
a) $\Rightarrow$
b) $\Leftrightarrow$
c) $\Rightarrow$ ($x^2 = x$ har også løsningen $x = 0$)

3.53
a) $x = 16$
b) $x - 1 = 9$, $x = 10$
c) Ingen løsning, en kvadratrot er aldri negativ.

3.54
a) $x^2 - x - 12 = 0$ gir 4 og -3. Prøve: -3 er falsk. $x = 4$.
b) $x^2 - 3x - 4 = 0$ gir 4 og -1. Prøve: -1 er falsk. $x = 4$.

3.55
$\sqrt{x} = 6 - x$ gir $x = 36 - 12x + x^2$, $x^2 - 13x + 36 = 0$, altså 4 og 9. Prøve: $9 + 3 = 12 \neq 6$. Løsningen er $x = 4$.

3.56
a) $x = 2$
b) $2x + 1 = 3x - 9$, $x = 10$
c) $2 + 1 = 6x$, $x = \frac{1}{2}$

3.57
a) $x = 2$, men da er nevneren null. Ingen løsning.
b) $x - 3 = 2$, $x = 5$. Nevneren er $8 \neq 0$, så $x = 5$ er en løsning.

3.58
Det er delt på x, og løsningen $x = 0$ er mistet. Riktig: $x(x^2 - 4) = 0$, så $x = 0 \vee x = 2 \vee x = -2$.

3.59
`4 True` og `-3 False`. $x = -3$ er en falsk løsning av $\sqrt{x + 12} = x$.

3.60
Venstre side er $\sqrt{1} = 1$, men høyre side er -1. Løsningen kommer fra kvadreringen, der også $-\sqrt{x+2} = x$ gir $x + 2 = x^2$.

3.61
$x + 5 = x^2 - 2x + 1$, $x^2 - 3x - 4 = 0$, altså 4 og -1. Prøve: $x = -1$ gir $2 \neq -2$. Løsningen er $x = 4$.

3.6.1 Nullpunktfaktorisering

3.62
a) $(x-5)(x+2)$
b) $(x+3)(x+5)$
c) $(x-1)(2x+1)$

3.63
a) $3(x+3)(x-1)$
b) $(2x-1)^2$
c) $2(x-3)(x+3)$

3.64
Nullpunktene er $1 \pm \sqrt{3}$, så $\left(x - 1 - \sqrt{3}\right)\left(x - 1 + \sqrt{3}\right)$.

3.65
a) Nei, $D = -8 < 0$.
b) Ja, $(x-1)^2$.

3.66
a) $\frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+3)} = \frac{x+1}{x+3}$
b) $\frac{(2x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x-1}{x-1}$
c) $\frac{(x-2)(3x+1)}{(x-2)(x+2)} = \frac{3x+1}{x+2}$

3.67
$2(x-3)(x+1) = 2x^2 - 4x - 6$

3.68
$(2x-1)(x-4) = 2x^2 - 9x + 4$

3.69
$a = 3$ mangler. Riktig er $3(x-1)(x+1)$.

3.70
`1.5 -2.0`. Altså er $2x^2 + x - 6 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x+2) = (2x-3)(x+2)$.

3.71
$c = 9$

3.72
Er $ax^2 + bx + c = a(x-p)(x-q)$, er $x = p$ en løsning av $ax^2 + bx + c = 0$. Men når $D < 0$, har likningen ingen løsninger.

3.7.1 Polynomdivisjon

3.73
a) $x + 6$
b) $x + 3$
c) $x - 5$

3.74
a) $3x + 2$
b) $x^2 - 1$

3.75
a) $x^2 + 3x + 9$
b) $x^2 - x + 1$

3.76
$x + 6 + \frac{7}{x-1}$

3.77
a) $P(2) = 8 - 4 + 5 = 9$
b) $P(-1) = -1 + 2 + 5 = 6$

3.78
Ja, $P(-2) = -8 + 8 = 0$.

3.79
$-5x - (-3x) = -2x$, ikke $-8x$. Det som er igjen, er $-2x + 6$, og svaret er $x - 2$.

3.80
`-2 0`, `-1 0`, `1 -6` og `2 0`. Divisjonen går opp for $a = -2$, $a = -1$ og $a = 2$.

3.81
$x^2 - 1$

3.82
$P(-2) = 4 - 2a + 6 = 0$, så $a = 5$.

3.7.2 Likninger av høyere grad

3.83
a) $x = 0 \vee x = \pm 1$
b) $x = 0 \vee x = -4$
c) $x = 0 \vee x = 2 \vee x = 3$

3.84
$x^2(x-2) - (x-2) = (x^2-1)(x-2) = 0$, så $x = 1 \vee x = -1 \vee x = 2$.

3.85

a) $P(2) = 0$. Divisjon gir $x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$. $x = 2 \vee x = -1 \vee x = -3$.

b) $P(-1) = 0$. Divisjon gir $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$. $x = -1 \vee x = 3 \vee x = -2$.

3.86

a) $x^2 = 4$ eller $x^2 = 9$: $x = \pm 2 \vee x = \pm 3$

b) $x^2 = 4$ eller $x^2 = -1$ (umulig): $x = \pm 2$

3.87

$x = 2$. ($x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$, og $x^2 + 2x + 4$ har ingen nullpunkter.)

3.88

$P(-1) = -1 + k + 4 = 0$, så $k = -3$.

3.89

-2, -1 og 3.

3.90

$x^3 + x - 10 = 0$. $x = 2$ gir $8 + 2 - 10 = 0$. Divisjon gir $x^2 + 2x + 5$, som har $D < 0$. Tallet er 2.

3.91

$(x - 1)(x - 2)(x - 3)$

3.92

Tre. Hver løsning a gir en faktor $x - a$, og et tredjegradspolynom kan ikke ha flere enn tre faktorer av første grad.