# 1 Tall

Overskriftene viser til delkapitlene i boka. Først kommer et formelark for hele kapittelet. Under hver overskrift står gjennomregnede eksempler med løsning, og deretter oppgaver du skal løse uten hjelpemidler, som på del 1 av eksamen. Fasiten står bakerst.

## Formelark

### TALLMENGDER

*Naturlige tall*

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

*Hele tall*

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$$

*Rasjonale tall*

$$\frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0$$

*Tallmengdene*

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

*Periodisk desimaltall*

$$x = 0{,}\overline{36} \Rightarrow 100x - x = 36$$

*Intervall*

$$[a, b\rangle : a \leqslant x < b$$

- Rasjonale tall er endelige eller periodiske desimaltall. Irrasjonale tall har uendelig mange desimaler uten periode.
- Hakeparentes: endepunktet er med. Vinkelparentes: endepunktet er ikke med, og alltid ved $\rightarrow$ og $\leftarrow$.

### TALLMØNSTRE

*Fast differanse d*

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

*Kvadrattall*

$$n^2$$

*Trekanttall*

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

*Summen av oddetall*

$$1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

- Mange eksempler beviser ikke en påstand, men ett moteksempel er nok til å vise at den er usann.

### ALGORITMER

*Heltallsdivisjon og rest*

$$17 = 3 \cdot 5 + 2$$

*Prøvedivisjon*

prøv $2, 3, \ldots$ opp til $\sqrt{n}$

*Primtallsfaktorisering*

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

*Euklids algoritme*

$$\mathrm{SFF}(a, b) = \mathrm{SFF}(b, r)$$

- `range(a, b)` stopper før `b`. Lag en sporingstabell når du skal finne ut hva et program gjør.
- 1 er ikke et primtall.

### POTENSER

*Gange og dele*

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

*Potens av potens*

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

*Produkt og brøk*

$$(ab)^n = a^n b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

*Null og negativ eksponent*

$$a^0 = 1 \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

*Kvadratrøtter*

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

*Brøk som eksponent*

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a} \qquad a^{m/n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

- Reglene gjelder bare for samme grunntall, og ikke for summer: $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
- En negativ eksponent gir ikke et negativt tall: $2^{-3} = \frac{1}{8}$.

### STORE OG SMÅ TALL

*Standardform*

$$k \cdot 10^n, \quad 1 \leqslant k < 10$$

*Gange og dele*

$$(a \cdot 10^m)(b \cdot 10^n) = ab \cdot 10^{m+n}$$

*Store prefikser*

$$T = 10^{12},\ G = 10^9,\ M = 10^6,\ k = 10^3$$

*Små prefikser*

$$m = 10^{-3},\ \mu = 10^{-6},\ n = 10^{-9}$$

- Juster til slutt, slik at tallet foran er mellom 1 og 10. Små tall har negativ eksponent.

### BEVIS

*Partall og oddetall*

$$2k \qquad 2k + 1$$

*Implikasjon og ekvivalens*

$$A \Rightarrow B \qquad A \Leftrightarrow B$$

*Indirekte bevis*

anta det motsatte $\Rightarrow$ motsigelse

*Irrasjonalt*

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

- Eksempler er ikke et bevis, men ett moteksempel er nok til å vise at en påstand er usann.
- Bruk ulike bokstaver for tall som kan være ulike.

## 1.1.1 Tallmengder

EKSEMPEL *Naturlig eller helt tall*

Hvilke av tallene 7, $-2$, 0 og $\frac{12}{4}$ er naturlige tall, og hvilke er hele tall?

*Løsning*

- $7 \in \mathbb{N}$, og derfor også $7 \in \mathbb{Z}$.
- $-2 \in \mathbb{Z}$, men $-2 \notin \mathbb{N}$.
- $0 \in \mathbb{Z}$, men $0 \notin \mathbb{N}$.
- $\frac{12}{4} = 3$, så $\frac{12}{4} \in \mathbb{N}$ og $\frac{12}{4} \in \mathbb{Z}$. Et tall kan skrives som en brøk og likevel være et naturlig tall.

EKSEMPEL *Endelige desimaltall som brøk*

Skriv som brøk, og forkort så mye som mulig.

a) 0,35

b) 2,125

*Løsning*

a) $0{,}35 = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$

b) $2{,}125 = \frac{2125}{1000} = \frac{17}{8}$. Vi har forkortet med 125.

EKSEMPEL *Periodiske desimaltall som brøk*

Skriv $0{,}\overline{36}$ som brøk.

*Løsning*

Vi kaller tallet $x$. Perioden har to sifre, så vi ganger med 100:

$$100x = 36{,}363636\ldots$$
$$x = 0{,}363636\ldots$$

Når vi trekker den nederste likningen fra den øverste, forsvinner alle desimalene:

$$99x = 36$$
$$x = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$$

Sjekk: $4 : 11 = 0{,}3636\ldots$

EKSEMPEL *Den minste tallmengden*

Finn den minste av mengdene $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{R}$ som tallet hører til.

a) $\sqrt{25}$

b) $\sqrt{8}$

c) $-\frac{6}{4}$

d) $0{,}\overline{3}$

*Løsning*

a) $\sqrt{25} = 5$, så tallet er i $\mathbb{N}$.

b) 8 er ikke et kvadrattall, så $\sqrt{8}$ er irrasjonalt. Den minste mengden er $\mathbb{R}$.

c) $-\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$ er en brøk, men ikke et helt tall. Den minste mengden er $\mathbb{Q}$.

d) $0{,}\overline{3} = \frac{1}{3}$ er periodisk, og derfor rasjonalt. Den minste mengden er $\mathbb{Q}$.

EKSEMPEL *Fra ulikhet til intervall*

Skriv som intervall, og beskriv hvordan intervallet ser ut på tallinja.

a) $-2 \leqslant x < 3$

b) $x > 1$

*Løsning*

a) $x \in [-2, 3\rangle$. Fylt prikk på $-2$, åpen prikk på 3, og strek mellom.

b) $x \in \langle 1, \rightarrow\rangle$. Åpen prikk på 1, og strek mot høyre uten slutt.

EKSEMPEL *Hele tall i et intervall*

Hvilke hele tall ligger i intervallet $\langle -3, 2]$?

*Løsning*

$-3$ er ikke med, men 2 er med. De hele tallene er $-2$, $-1$, 0, 1 og 2, altså fem tall.

**1.1** Hvilke av tallene er naturlige tall?

$$-3, \quad 0, \quad 4, \quad \frac{2}{3}, \quad \sqrt{9}, \quad \frac{10}{5}$$

**1.2** Finn den minste av mengdene $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{R}$ som tallet hører til.

a) $-12$

b) $\frac{3}{4}$

c) $\sqrt{49}$

d) $\sqrt{7}$

e) $-\frac{16}{4}$

**1.3** Er påstanden sann eller usann?

a) $-5 \in \mathbb{N}$

b) $0{,}3 \in \mathbb{Q}$

c) $\pi \in \mathbb{Q}$

d) $\sqrt{36} \in \mathbb{Z}$

**1.4** Skriv som brøk, og forkort så mye som mulig.

a) 0,6

b) 0,75

c) 0,05

d) 1,25

**1.5** Skriv som desimaltall. Bruk strek over sifrene som gjentar seg.

a) $\frac{3}{8}$

b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{7}{20}$

d) $\frac{1}{11}$

**1.6** Skriv som brøk, og forkort så mye som mulig.

a) $0{,}\overline{4}$

b) $0{,}\overline{27}$

c) $0{,}\overline{123}$

**1.7** Skriv som brøk, og forkort så mye som mulig.

a) $2{,}\overline{5}$

b) $0{,}\overline{81}$

**1.8** Gir brøken et endelig eller et periodisk desimaltall?

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{6}$

c) $\frac{3}{25}$

d) $\frac{5}{12}$

**1.9** Er tallet rasjonalt eller irrasjonalt?

a) $\sqrt{12}$

b) $\sqrt{\frac{4}{9}}$

c) 0,121212 ...

d) 0,101001000100001 ... (én null mer mellom hver ener)

e) $\frac{\pi}{2}$

**1.10** Skriv som intervall.

a) $1 \leqslant x \leqslant 6$

b) $-3 < x < 0$

c) $x < 5$

d) $x \geqslant -2$

**1.11** Skriv som ulikhet.

a) $x \in \langle 2, 7]$

b) $x \in [-4, 1\rangle$

c) $x \in \langle \leftarrow, 0]$

**1.12** Tegn intervallene på hver sin tallinje.

a) $[-2, 3\rangle$

b) $\langle 1, \rightarrow\rangle$

**1.13** Hvor mange hele tall ligger i intervallet?

a) $[-2, 2]$

b) $\langle -2, 2\rangle$

c) $\langle 0, 10]$

**1.14** Hvilke hele tall ligger i intervallet $\langle -\sqrt{5}, \sqrt{10}]$?

**1.15** Finn et rasjonalt tall og et irrasjonalt tall som begge ligger mellom 1 og 2.

**1.16** Hva blir utskriften når programmet kjøres? Hvilket intervall sjekker programmet?

*Python*

```
antall = 0
for x in [-2, -1, 0, 1, 2, 3]:
    if -1 <= x < 2:
        antall = antall + 1
print(antall)
```

**1.17** $\frac{1}{7} = 0{,}\overline{142857}$. Hvilket siffer står på plass nummer 20 etter kommaet?

**1.18** Skriv $0{,}2\overline{3} = 0{,}2333$ ... som brøk, og forkort så mye som mulig.

**1.19** Regn ut $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ og $\frac{1}{12}$ som desimaltall. Formuler en påstand om hvilke nevnere som gir endelige desimaltall.

**1.20** Er produktet av to irrasjonale tall alltid irrasjonalt? Begrunn svaret.

## 1.2.1 Tallmønstre og figurtall

EKSEMPEL *Fyrstikker i en rekke*

Bruk formelen $a_n = 3n + 1$ for fyrstikkfigurene.

a) Hvor mange fyrstikker trengs til figur 10?

b) Hvilken figur kan du lage med nøyaktig 100 fyrstikker?

*Løsning*

a) $a_{10} = 3 \cdot 10 + 1 = 31$ fyrstikker.

b) Vi løser $3n + 1 = 100$:

$$3n = 99$$
$$n = 33$$

Med 100 fyrstikker kan du lage figur 33, altså 33 kvadrater på rekke.

■

EKSEMPEL *Er tallet med i følgen?*

Tallfølgen er $7, 11, 15, 19, \ldots$

a) Finn en formel for $a_n$.

b) Finn $a_{50}$.

c) Er 2026 et ledd i følgen?

*Løsning*

a) $a_1 = 7$ og $d = 4$, så $a_n = 7 + (n-1) \cdot 4 = 4n + 3$.

b) $a_{50} = 4 \cdot 50 + 3 = 203$.

c) Vi løser $4n + 3 = 2026$ og får $4n = 2023$, så $n = 505{,}75$. Det er ikke et naturlig tall, så 2026 er ikke med i følgen. (Alle leddene gir rest 3 ved deling på 4, men 2026 gir rest 2.)

▪

EKSEMPEL *Summen av tallene fra 1 til 100*

Regn ut $1 + 2 + 3 + \cdots + 100$.

*Løsning*

Summen er trekanttall nummer 100:

$$T_{100} = \frac{100 \cdot 101}{2} = \frac{10\,100}{2} = 5050$$

Det er det samme som å legge sammen tallene parvis: $1 + 100$, $2 + 99$, $3 + 98$, ... Det blir 50 par som hver har summen 101, og $50 \cdot 101 = 5050$.

▪

EKSEMPEL *Et mønster som brister*

Påstand: $n^2 + n + 41$ *er et primtall for alle* $n \in \mathbb{N}$.

a) Test påstanden for $n = 1$, $n = 2$ og $n = 3$.

b) Vis at påstanden er usann ved å se på $n = 40$.

*Løsning*

a) $n = 1$ gir 43, $n = 2$ gir 47 og $n = 3$ gir 53. Alle er primtall. (Påstanden stemmer faktisk for alle $n$ fra 1 til 39.)

b) $40^2 + 40 + 41 = 40 \cdot 40 + 40 + 41 = 40 \cdot 41 + 41 = 41 \cdot 41 = 1681$. Det er ikke et primtall, så $n = 40$ er et moteksempel, og påstanden er usann.

▪

**1.21** Skriv de to neste tallene i følgen.

a) $3, 8, 13, 18, \ldots$

b) $50, 44, 38, \ldots$

c) $1, 3, 6, 10, \ldots$

d) $1, 2, 4, 8, \ldots$

**1.22** Finn en formel for $a_n$, og forenkle.

a) $4, 7, 10, 13, \ldots$

b) $1, 6, 11, 16, \ldots$

c) $9, 7, 5, 3, \ldots$

d) $-3, 1, 5, 9, \ldots$

**1.23** En tallfølge er gitt ved $a_n = 5n - 2$.

a) Finn de tre første leddene.

b) Finn $a_{40}$.

c) Hvilket ledd er lik 98?

**1.24** Tallfølgen er $2, 9, 16, 23, \ldots$

a) Finn $a_{20}$.

b) Er 100 et ledd i følgen?

c) Er 200 et ledd i følgen?

**1.25** Finn trekanttallet.

a) $T_8$

b) $T_{15}$

c) $T_{50}$

**1.26** Regn ut $1 + 2 + 3 + \cdots + 40$.

**1.27** 78 er et trekanttall. Hvilket nummer har det?

**1.28** Regn ut $1 + 3 + 5 + \cdots + 19$ uten å legge sammen tallene ett for ett.

**1.29** Med fyrstikker legges trekanter på rekke, annenhver med spissen opp og ned. Én trekant trenger 3 fyrstikker, to trekanter 5 og tre trekanter 7.

a) Hvor mange fyrstikker trengs til 15 trekanter?

b) Finn en formel for antall fyrstikker til $n$ trekanter.

c) Hvor mange trekanter kan du lage med 51 fyrstikker?

**1.30** Figur $n$ er et kvadrat med $n$ prikker på hver side, men bare kanten er tegnet. Figur 2 har 4 prikker, figur 3 har 8 og figur 4 har 12.

a) Hvor mange prikker har figur 10?

b) Finn en formel for antall prikker i figur $n$.

**1.31** Figurene i et mønster har $2, 6, 12, 20, \ldots$ prikker. Figur $n$ er et rektangel med $n$ rader.

a) Hvor mange prikker har figur 6?

b) Finn en formel for figur $n$.

c) Hva er sammenhengen med trekanttallene?

**1.32** Martin skal finne en formel for følgen $5, 8, 11, 14, \ldots$ Han skriver $a_n = 5 + 3n$. Hva er feil, og hva er riktig formel?

**1.33** Påstand: $n^2 - n + 11$ *er et primtall for alle* $n \in \mathbb{N}$.

a) Test påstanden for $n = 1, 2, 3$.

b) Vis at påstanden er usann.

**1.34** Påstand: *Produktet av to oddetall er alltid et oddetall.*

Test påstanden med tre eksempler. Tror du den er sann? Er eksemplene et bevis?

**1.35** Hva blir utskriften? Hvilke tall er det?

*Python*

```
s = 0
for n in range(1, 5):
    s = s + 2 * n - 1
    print(s)
```

**1.36** Hva blir utskriften? Finn en formel for tallfølgen.

*Python*

```
for n in range(1, 6):
    print(4 * n - 1)
```

**1.37** I en turnering med 6 lag skal alle lag spille én kamp mot hvert av de andre. Hvor mange kamper blir det?

**1.38** Regn ut summen av alle partall fra 2 til 100.

**1.39** a) Regn ut $8T_n + 1$ for $n = 1, 2, 3, 4$. Hva ser du?

b) Formuler en påstand, og vis at den stemmer for alle $n$.

**1.40** Hvor mange kvadrater, av alle størrelser, finnes det i et rutenett med $3 \cdot 3$ ruter? Og med $4 \cdot 4$ ruter? Ser du et mønster?

## 1.3.1 Algoritmisk tenkning

**1.41** Hva blir utskriften?

*Python*

```
x = 5
x = x * 2
x = x - 3
print(x)
```

**1.42** Hva blir utskriften?

*Python*

```
for i in range(4):
    print(i + 1)
```

**1.43** a) Hvor mange ganger kjører løkka `for i in range(5, 9):`?

b) Hvilke tall gir `range(0, 10, 2)`?

**1.44** Regn ut.

a) `23 // 4`

b) `23 % 4`

c) `30 % 6`

**1.45** Lag en sporingstabell, og finn utskriften.

*Python*

```
s = 0
for i in range(1, 5):
    s = s + i * i
print(s)
```

**1.46** Lag en sporingstabell, og finn utskriften. Hva regner programmet ut?

*Python*

```
p = 1
for i in range(1, 6):
    p = p * i
print(p)
```

**1.47** Følg Collatz-algoritmen (del på 2 hvis partall, ellers gang med 3 og legg til 1) fra $n = 12$. Hvor mange steg tar det å komme til 1?

**1.48** Hva blir utskriften?

*Python*

```
n = 100
k = 0
while n > 1:
    n = n // 2
    k = k + 1
print(k)
```

**1.49** Hva blir utskriften?

*Python*

```
x = 7
if x % 2 == 0:
    print("partall")
else:
    print("oddetall")
```

**1.50** Programmet skal regne ut $1 + 2 + \cdots + 9$, men skriver ut `9`. Finn feilen.

*Python*

```
for i in range(1, 10):
    summ = 0
    summ = summ + i
print(summ)
```

**1.51** Hva gjør programmet, og hva blir utskriften?

*Python*

```
n = 0
for x in [3, 8, 1, 9, 4]:
    if x > 5:
        n = n + 1
print(n)
```

**1.52** Programmet skriver ut femgangen. Hvilken linje må endres, og hvordan, for at det skal skrive ut sjugangen fra 7 til 70?

*Python*

```
for i in range(1, 11):
    print(5 * i)
```

**1.53** Hva blir utskriften?

*Python*

```
n = 2026
s = 0
while n > 0:
    s = s + n % 10
    n = n // 10
print(s)
```

**1.54** Beskriv med ord en algoritme som finner det minste tallet i en liste.

**1.55** Du skal gjette et tall mellom 1 og 100, og får vite om svaret er for høyt eller for lavt. Beskriv en algoritme som finner tallet raskt. Hvor mange gjett trenger du høyst?

## 1.3.2 Algoritmer i matematikken

EKSEMPEL *Er tallet et primtall?*

Avgjør om tallet er et primtall.

a) 91

b) 97

*Løsning*

Det holder å prøve primtallene 2, 3, 5 og 7, siden $\sqrt{97} < 10$. (Går 4 opp, går også 2 opp.)

a) $91 : 7 = 13$. Altså er $91 = 7 \cdot 13$, og 91 er ikke et primtall.

b) 97 er ikke delelig med 2, 3 (tverrsum 16), 5 eller 7 ($7 \cdot 14 = 98$). Altså er 97 et primtall. ∎

EKSEMPEL *Faktorisering med en stige*

Primtallsfaktoriser 360.

*Løsning*

$$\begin{aligned} 360 : 2 &= 180 \\ 180 : 2 &= 90 \\ 90 : 2 &= 45 \\ 45 : 3 &= 15 \\ 15 : 3 &= 5 \\ 5 : 5 &= 1 \end{aligned}$$

Altså er $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. ∎

EKSEMPEL *Euklids algoritme for hånd*

Finn SFF(84, 36) med Euklids algoritme, og forkort $\frac{36}{84}$.

*Løsning*

$$\begin{aligned} 84 &= 2 \cdot 36 + 12 \\ 36 &= 3 \cdot 12 + 0 \end{aligned}$$

Resten ble 0, så SFF(84, 36) = 12. Da er $\frac{36}{84} = \frac{36 : 12}{84 : 12} = \frac{3}{7}$.

Sjekk med primtallsfaktorisering: $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ og $36 = 2^2 \cdot 3^2$. Felles er $2^2 \cdot 3 = 12$. ∎

**1.56** Hvilke av tallene er primtall?

$$21, \quad 23, \quad 27, \quad 29, \quad 31, \quad 33, \quad 37, \quad 39$$

**1.57** Avgjør med prøvedivisjon om tallet er et primtall.

a) 143

b) 149

**1.58** Hvor mange primtall er det mellom 1 og 50?

**1.59** Primtallsfaktoriser.

a) 84

b) 150

c) 256

d) 1001

**1.60** Finn den største felles faktoren.

a) SFF(24, 36)

b) SFF(35, 49)

c) SFF(18, 35)

**1.61** a) Finn SFF(252, 198) med Euklids algoritme.

b) Forkort $\frac{198}{252}$ så mye som mulig.

**1.62** Hva skriver programmet ut?

*Python*

```
n = 84
d = 2
while n > 1:
    if n % d == 0:
        print(d)
        n = n // d
    else:
        d = d + 1
```

**1.63** Hva skriver programmet ut?

*Python*

```
n = 119
d = 2
while n % d != 0:
    d = d + 1
print(d)
```

**1.64** Lag en sporingstabell for `a`, `b` og `r`, og finn utskriften.

*Python*

```
a = 105
b = 45
while b != 0:
    r = a % b
    a = b
    b = r
print(a)
```

**1.65** To naturlige tall har summen 15 og produktet 56. Finn tallene ved systematisk prøving.

**1.66** Finn alle naturlige tall $x$ slik at $x^2 + x < 30$.

**1.67** Et rektangel har areal 48 og sider som er hele tall. Hvor mange ulike rektangler finnes det? (Et rektangel som er $6 \cdot 8$, er det samme som $8 \cdot 6$.)

**1.68** Du har 72 epler og 54 pærer, og skal fordele dem i kurver slik at alle kurvene inneholder like mange epler og like mange pærer. Hva er det største antallet kurver du kan lage, og hva er i hver kurv?

**1.69** Forklar hvorfor det holder å prøve divisorer opp til $\sqrt{n}$ for å avgjøre om $n$ er et primtall.

## 1.4.1 Potensregler

EKSEMPEL *Én potens*

Skriv som én potens.

a) $5^4 \cdot 5^3$

b) $\frac{x^9}{x^4}$

c) $\frac{a^2 \cdot a^6}{a^5}$

*Løsning*

a) $5^{4+3} = 5^7$

b) $x^{9-4} = x^5$

c) $\frac{a^{2+6}}{a^5} = \frac{a^8}{a^5} = a^3$ ∎

EKSEMPEL *Opphøy hele uttrykket*

Forenkle.

a) $(2x^3)^2$

b) $\left(\frac{3a^2}{b}\right)^2$

*Løsning*

a) $(2x^3)^2 = 2^2 \cdot (x^3)^2 = 4x^6$

b) $\left(\frac{3a^2}{b}\right)^2 = \frac{3^2 \cdot (a^2)^2}{b^2} = \frac{9a^4}{b^2}$

■

EKSEMPEL *Negative eksponenter*

a) Regn ut $3^{-2}$ og $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$.

b) Forenkle $\frac{a^{-3} \cdot b^2}{a^2 \cdot b^{-1}}$, og skriv svaret uten negative eksponenter.

*Løsning*

a) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ og $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{2}$.

b)

$$\frac{a^{-3} \cdot b^2}{a^2 \cdot b^{-1}} = a^{-3-2} \cdot b^{2-(-1)} = a^{-5} \cdot b^3 = \frac{b^3}{a^5}$$

■

**1.70** Skriv som én potens.

a) $3^4 \cdot 3^5$

b) $\frac{7^8}{7^3}$

c) $(2^3)^4$

d) $\frac{5^2 \cdot 5^4}{5^3}$

**1.71** Regn ut.

a) $5^0$

b) $3^{-2}$

c) $2^{-1}$

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

**1.72** Forenkle.

a) $a^5 \cdot a^2$

b) $\frac{x^{10}}{x^4}$

c) $(3x)^2$

d) $(a^3)^4$

**1.73** Forenkle, og skriv svaret uten negative eksponenter.

a) $\left(2a^2b\right)^3$

b) $\frac{a^4b^2}{a^2b^3}$

c) $\left(x^{-2}\right)^3$

d) $\frac{\left(x^3y^{-2}\right)^2}{x^4y^{-3}}$

**1.74** Regn ut uten kalkulator.

a) $4^3 \cdot 2^{-4}$

b) $\frac{9^2}{3^3}$

c) $10^3 \cdot 10^{-5}$

**1.75** Finn $x$.

a) $3^x = 81$

b) $2^x = \frac{1}{8}$

c) $4^x = 2$

**1.76** Hva er feil? $2^3 \cdot 3^2 = 6^5$

**1.77** Vis med $a = 1$ og $b = 2$ at $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$.

**1.78** Hva blir utskriften?

*Python*

```
for n in range(0, 4):
    print(3**n)
```

**1.79** En bakteriekultur starter med 1000 bakterier og dobles hver time. Hvor mange bakterier er det etter 5 timer? Skriv uttrykket med en potens.

**1.80** Forenkle $\frac{2^n \cdot 2^{n+1}}{2^{2n}}$.

**1.81** Hvilket tall er størst, $2^{40}$ eller $3^{25}$? Begrunn uten kalkulator.

**1.82** $2^{10} = 1024 \approx 10^3$. Bruk dette til å gjøre et overslag over $2^{30}$.

**1.83** Forklar hvorfor $a^{-1} = \frac{1}{a}$. Bruk regelen for å dele potenser på $\frac{a^2}{a^3}$.

**1.84** Forenkle $\frac{(2x)^3 \cdot x^{-1}}{4x^2}$.

## 1.4.2 Røtter og potenser med brøk som eksponent

EKSEMPEL *Forenkle rotuttrykk*

Forenkle.

a) $\sqrt{72}$

b) $\sqrt{8} + \sqrt{18}$

c) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}$

*Løsning*

a) $\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}$

b) $\sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{4 \cdot 2} + \sqrt{9 \cdot 2} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

c) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$

■

EKSEMPEL *Rot i nevneren*

Skriv $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$ uten rottegn i nevneren.

*Løsning*

$$\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

■

EKSEMPEL *Regn ut og forenkle*

a) Regn ut $8^{2/3}$ og $27^{-1/3}$.

b) Skriv $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x}$ som én potens.

*Løsning*

a) $8^{2/3} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4$ og $27^{-1/3} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{27}} = \dfrac{1}{3}$.

b) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} = x^{1/2} \cdot x^{1/3} = x^{1/2+1/3} = x^{5/6}$.

■

**1.85** Regn ut.

a) $\sqrt{64}$

b) $\sqrt[3]{125}$

c) $\sqrt[3]{-27}$

d) $\sqrt[5]{32}$

**1.86** Forenkle.

a) $\sqrt{18}$

b) $\sqrt{48}$

c) $\sqrt{200}$

d) $\sqrt{45}$

**1.87** Regn ut.

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$

b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$

c) $\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$

**1.88** Forenkle.

a) $2\sqrt{3} + \sqrt{27}$

b) $\sqrt{50} - \sqrt{8}$

c) $\sqrt{12} + \sqrt{75}$

**1.89** Regn ut.

a) $25^{1/2}$

b) $32^{1/5}$

c) $16^{3/4}$

d) $8^{-2/3}$

**1.90** Skriv som én potens av $x$.

a) $\sqrt{x}$

b) $\sqrt[3]{x^5}$

c) $x\sqrt{x}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

**1.91** Skriv uten rottegn i nevneren.

a) $\dfrac{15}{\sqrt{5}}$

b) $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

**1.92** Hva er feil? $\sqrt{16} + \sqrt{9} = \sqrt{25}$

**1.93** Er $\sqrt{a^2} = a$ for alle reelle tall $a$? Prøv med $a = -3$.

**1.94** a) En terning har volum 27 $\text{dm}^3$. Hvor lang er siden?

b) Et kvadrat har areal 50 $\text{cm}^2$. Hvor lang er siden? Svar eksakt.

**1.95** Regn ut.

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$

b) $\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)$

**1.96** Ordne tallene 3, $\sqrt{8}$ og $\sqrt[3]{30}$ fra minst til størst uten kalkulator.

**1.97** Hva blir utskriften?

*Python*

```
print(27 ** (1/3))
print(16 ** 0.5)
```

**1.98** Forenkle $\left(x^{1/2} \cdot x^{1/3}\right)^6$.

**1.99** Forklar hvorfor det er naturlig at $9^{1/2} = 3$. Bruk regelen $(a^m)^n = a^{mn}$.

## 1.5.1 Standardform og prefikser

EKSEMPEL *Skriv på standardform*

Skriv på standardform.

a) 4 700 000

b) 0,000 32

c) $34 \cdot 10^5$

*Løsning*

a) Kommaet flyttes 6 plasser mot venstre: $4\,700\,000 = 4{,}7 \cdot 10^6$.

b) Kommaet flyttes 4 plasser mot høyre: $0{,}000\,32 = 3{,}2 \cdot 10^{-4}$.

c) 34 er ikke mellom 1 og 10. $34 = 3{,}4 \cdot 10^1$, så $34 \cdot 10^5 = 3{,}4 \cdot 10^1 \cdot 10^5 = 3{,}4 \cdot 10^6$.

■

EKSEMPEL *Gange og dele*

Regn ut, og skriv svaret på standardform.

a) $(3 \cdot 10^5) \cdot (4 \cdot 10^7)$

b) $\dfrac{6 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^{-3}}$

*Løsning*

a) $3 \cdot 4 \cdot 10^{5+7} = 12 \cdot 10^{12} = 1{,}2 \cdot 10^1 \cdot 10^{12} = 1{,}2 \cdot 10^{13}$

b) $\dfrac{6}{2} \cdot 10^{8-(-3)} = 3 \cdot 10^{11}$

■

EKSEMPEL *Lyset fra sola*

Lyset går $3 \cdot 10^8$ m per sekund. Avstanden til sola er $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m. Hvor lang tid bruker lyset fra sola til jorda?

*Løsning*

$$\frac{1{,}5 \cdot 10^{11}\ \text{m}}{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}} = 0{,}5 \cdot 10^3\ \text{s} = 500\ \text{s}$$

Det er litt over 8 minutter. Lyset du ser fra sola, ble sendt ut for 8 minutter siden.

■

EKSEMPEL *Fra prefiks til standardform*

a) En minnepinne har plass til 64 GB. Hvor mange byte er det?

b) Bølgelengden til grønt lys er 530 nm. Skriv den i meter på standardform.

*Løsning*

a) $64\ \text{GB} = 64 \cdot 10^9\ \text{byte} = 6{,}4 \cdot 10^{10}\ \text{byte}$.

b) $530\ \text{nm} = 530 \cdot 10^{-9}\ \text{m} = 5{,}3 \cdot 10^2 \cdot 10^{-9}\ \text{m} = 5{,}3 \cdot 10^{-7}\ \text{m}$.

■

**1.100** Skriv på standardform.

a) 380 000

b) 0,0072

c) 6 000 000 000

d) 0,000 000 41

**1.101** Skriv som vanlig tall.

a) $2{,}5 \cdot 10^3$

b) $4 \cdot 10^{-4}$

c) $9{,}01 \cdot 10^5$

**1.102** Er tallet skrevet på standardform? Skriv det på standardform hvis ikke.

a) $12 \cdot 10^3$

b) $0{,}5 \cdot 10^4$

c) $3{,}3 \cdot 10^{-2}$

**1.103** Regn ut, og skriv svaret på standardform.

a) $(3 \cdot 10^4)(2 \cdot 10^5)$

b) $(4 \cdot 10^{-3})(2 \cdot 10^7)$

c) $\dfrac{8 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^2}$

d) $\dfrac{9 \cdot 10^{-2}}{3 \cdot 10^{-5}}$

**1.104** Regn ut, og skriv svaret på standardform.

a) $(5 \cdot 10^3)(4 \cdot 10^6)$

b) $\dfrac{1{,}2 \cdot 10^5}{4 \cdot 10^2}$

**1.105** Regn ut, og skriv svaret på standardform.

a) $(3 \cdot 10^4)^2$

b) $(2 \cdot 10^{-3})^3$

**1.106** Regn ut, og skriv svaret på standardform.

a) $5 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^5$

b) $6 \cdot 10^{-3} - 4 \cdot 10^{-4}$

**1.107** Skriv på standardform i grunnenheten.

a) 4,7 MW

b) 35 µg

c) 2 TB

d) 0,8 ns

**1.108** Hvor mange millimeter er 3 km? Svar på standardform.

**1.109** Ordne tallene fra minst til størst: $3{,}2 \cdot 10^{-4}$, $2{,}9 \cdot 10^{-3}$ og $4 \cdot 10^{-5}$.

**1.110** Lyset går $3 \cdot 10^8$ m per sekund, og et år har omtrent $3 \cdot 10^7$ sekunder. Hvor langt går lyset på ett år (et lysår)?

**1.111** En voksen har omtrent 5 liter blod, og det er omtrent $5 \cdot 10^6$ røde blodceller per $\text{mm}^3$. Hvor mange røde blodceller har en voksen? ($1\ \text{L} = 10^6\ \text{mm}^3$.)

**1.112** Et hår vokser omtrent 0,4 mm per døgn. Et døgn har omtrent $9 \cdot 10^4$ sekunder. Gjør et overslag over hvor mye håret vokser per sekund.

**1.113** *Python* Hva blir utskriften? Skriv svaret på standardform.

```
print(4e5 / 2e-3)
```

**1.114** Python skriver ut `6e-08`. Hva betyr det? Skriv tallet som vanlig desimaltall.

## 1.6.1 Direkte bevis

EKSEMPEL *Sann eller usann implikasjon*

Er implikasjonen sann?

a) $x > 5 \Rightarrow x > 2$

b) $x > 2 \Rightarrow x > 5$

c) $n$ er delelig med $6 \Rightarrow n$ er et partall

*Løsning*

a) Sann. Et tall som er større enn 5, er også større enn 2.

b) Usann. $x = 3$ er større enn 2, men ikke større enn 5.

c) Sann. Er $n = 6k$, er $n = 2 \cdot 3k$, og da er $n$ et partall.

■

EKSEMPEL *Summen av to oddetall*

Bevis at summen av to oddetall er et partall.

*Løsning*

La de to oddetallene være $2a + 1$ og $2b + 1$, der $a$ og $b$ er hele tall. Da er summen

$$(2a + 1) + (2b + 1) = 2a + 2b + 2 = 2(a + b + 1)$$

Siden $a + b + 1$ er et helt tall, er summen 2 ganger et helt tall, altså et partall. ■

(Symbolet ■ betyr at beviset er ferdig.)

■

EKSEMPEL *Produktet av to oddetall*

Bevis at produktet av to oddetall er et oddetall.

*Løsning*

$(2a + 1)(2b + 1) = 4ab + 2a + 2b + 1 = 2(2ab + a + b) + 1$

$2ab + a + b$ er et helt tall, så produktet har formen $2k + 1$ og er et oddetall. ■

■

EKSEMPEL *Differansen mellom to kvadrattall*

Bevis at differansen mellom to kvadrattall som følger etter hverandre, er et oddetall.

*Løsning*

$(n + 1)^2 - n^2 = (n + 1)(n + 1) - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$

$2n + 1$ er et oddetall. ■

Det stemmer med eksempler: $4 - 1 = 3$, $9 - 4 = 5$, $16 - 9 = 7$.

■

EKSEMPEL *To tall på rad*

Bevis at produktet av to hele tall som følger etter hverandre, $n(n + 1)$, alltid er et partall.

*Løsning*

*Tilfelle 1:* $n$ er et partall, $n = 2k$. Da er $n(n + 1) = 2k(n + 1) = 2 \cdot k(n + 1)$, et partall.

*Tilfelle 2:* $n$ er et oddetall, $n = 2k + 1$. Da er $n + 1 = 2k + 2 = 2(k + 1)$, og $n(n + 1) = 2 \cdot n(k + 1)$, et partall.

Alle hele tall er enten partall eller oddetall, så påstanden gjelder for alle $n$. ■

■

I oppgavene er $k$, $a$, $b$ og $n$ hele tall.

**1.115** Er tallet et partall eller et oddetall?

a) $2k + 6$

b) $4k + 1$

c) $2k - 1$

d) $10k$

**1.116** Er implikasjonen sann?

a) $x = -2 \Rightarrow x^2 = 4$

b) $x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$

c) $x > 0 \Rightarrow x^2 > 0$

d) $x^2 > 0 \Rightarrow x > 0$

**1.117** Sett inn $\Rightarrow$ eller $\Leftrightarrow$ der det passer best.

a) $x + 3 = 5 \quad \square \quad x = 2$

b) $x = 1 \quad \square \quad x^2 = 1$

**1.118** Bevis at summen av to partall er et partall.

**1.119** Bevis at produktet av et partall og et helt tall alltid er et partall.

**1.120** Bevis at summen av tre oddetall er et oddetall.

**1.121** Bevis at differansen mellom to oddetall er et partall.

**1.122** Bevis at kvadratet av et partall er delelig med 4.

**1.123** Hva er feil med dette «beviset»?

«$1 + 3 = 4$ og $3 + 5 = 8$. Altså er summen av to oddetall alltid et partall.»

**1.124** Bevis at $(n + 1)^2 - (n - 1)^2$ alltid er delelig med 4.

**1.125** a) Bevis at summen av fire hele tall som følger etter hverandre, alltid er et partall.

b) Er summen alltid delelig med 4?

**1.126** Bevis at $n^2 - n$ alltid er et partall.

**1.127** Bevis at hvis $n$ er delelig med 6, så er $n$ delelig med 3.

**1.128** Bevis at summen av et helt tall og det dobbelte av tallet alltid er delelig med 3.

**1.129** Et tosifret tall har sifrene $a$ og $b$, og kan skrives $10a + b$. Bevis at når du trekker fra tallet med sifrene byttet om, blir svaret alltid delelig med 9. (Eksempel: $72 - 27 = 45$.)

## 1.6.2 Moteksempel og indirekte bevis

EKSEMPEL *Finn et moteksempel*

Vis at påstanden er usann.

a) $a^2 > a$ for alle reelle tall $a$.

b) Hvis $a > b$, så er $a^2 > b^2$.

*Løsning*

a) $a = \frac{1}{2}$ gir $a^2 = \frac{1}{4}$, som er mindre enn $\frac{1}{2}$. (Også $a = 0$ og $a = 1$ er moteksempler, siden $a^2 = a$ der.)

b) $a = 1$ og $b = -2$ gir $a > b$, men $a^2 = 1$ er mindre enn $b^2 = 4$.

■

EKSEMPEL *Det finnes ikke noe største naturlige tall*

Bevis indirekte at det ikke finnes noe største naturlige tall.

*Løsning*

Anta at $N$ er det største naturlige tallet. Da er $N + 1$ også et naturlig tall, og $N + 1 > N$. Det motsier at $N$ er det største. Altså finnes det ikke noe største naturlige tall. ■

■

EKSEMPEL *Når kvadratet er et partall*

Bevis at hvis $n^2$ er et partall, så er $n$ et partall.

*Løsning*

Anta at $n^2$ er et partall, men at $n$ er et oddetall. Fra 1.6.1 vet vi at kvadratet av et oddetall er et oddetall, så $n^2$ er et oddetall. Det motsier at $n^2$ er et partall. Altså må $n$ være et partall. ■

■

EKSEMPEL *Likning uten heltallsløsning*

Bevis at det ikke finnes hele tall $a$ og $b$ slik at $2a + 4b = 7$.

*Løsning*

Anta at $a$ og $b$ er hele tall med $2a + 4b = 7$. Venstre side er $2(a + 2b)$, et partall. Høyre side, 7, er et oddetall. Et tall kan ikke være både partall og oddetall, så det er en motsigelse. Altså finnes det ingen slike hele tall. ■

■

**1.130** Finn et moteksempel.

a) «Alle oddetall er primtall.»

b) «$2^n + 1$ er et primtall for alle $n \in \mathbb{N}$.»

c) «Hvis $a < b$, så er $\frac{a}{b} < 1$.»

**1.131** Skriv det motsatte av påstanden.

a) «Alle bilene på parkeringsplassen er røde.»

b) «Ingen elever kom for sent.»

c) «Det finnes et primtall som er større enn 100.»

**1.132** Påstand: «Alle tall som er delelige med 4, er delelige med 8.» Hvilket av tallene 12 og 16 er et moteksempel?

**1.133** Bevis indirekte at hvis $3n + 2$ er et oddetall, så er $n$ et oddetall.

**1.134** Bevis at det ikke finnes hele tall $a$ og $b$ slik at $4a + 6b = 9$.

**1.135** Bevis at $\sqrt{5}$ er irrasjonalt. Du kan bruke at hvis $p^2$ er delelig med 5, så er $p$ delelig med 5.

**1.136** Bevis at det ikke finnes noe minste positive rasjonale tall.

**1.137** Bevis at hvis produktet $a \cdot b$ er et oddetall, så er både $a$ og $b$ oddetall.

**1.138** Bevis at $1 + \sqrt{2}$ er irrasjonalt. Bruk at $\sqrt{2}$ er irrasjonalt.

**1.139** Bevis at $\sqrt{8}$ er irrasjonalt. Bruk at $\sqrt{2}$ er irrasjonalt.

**1.140** Er påstanden sann eller usann?

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ er irrasjonalt.

b) $\sqrt{4}$ er irrasjonalt.

c) Det finnes ikke noe største partall.

**1.141** Påstand: $n^2 + n + 17$ *er et primtall for alle* $n \in \mathbb{N}$. Finn et moteksempel.

**1.142** *Python* Hva skriver programmet ut? Hva viser det om påstanden «$n^2 + n + 17$ er alltid et primtall»?

```
for n in [14, 15, 16]:
    t = n**2 + n + 17
    print(n, t % 17)
```

**1.143** Hva er feil med dette «beviset» for at $\sqrt{2}$ er irrasjonalt?

«$\sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots$ har mange desimaler uten mønster, altså er $\sqrt{2}$ irrasjonalt.»

**1.144** Se på tallene $2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31$ og $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30\,031 = 59 \cdot 509$. Hva viser det om tallet $N = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1$ i Euklids bevis for at det finnes uendelig mange primtall?

# Fasit

## 1.1.1 Tallmengder

**1.1**

4, $\sqrt{9} = 3$ og $\frac{10}{5} = 2$

**1.2**

a) $\mathbb{Z}$

b) $\mathbb{Q}$

c) $\mathbb{N}$, siden $\sqrt{49} = 7$

d) $\mathbb{R}$

e) $\mathbb{Z}$, siden $-\frac{16}{4} = -4$

**1.3**

a) Usann

b) Sann, $0{,}3 = \frac{3}{10}$

c) Usann, $\pi$ er irrasjonalt

d) Sann, $\sqrt{36} = 6$

**1.4**

a) $\frac{3}{5}$

b) $\frac{3}{4}$

c) $\frac{1}{20}$

d) $\frac{5}{4}$

**1.5**

a) 0,375

b) $0{,}\overline{6}$

c) 0,35

d) $0{,}\overline{09}$

**1.6**

a) $10x - x = 4$, så $x = \frac{4}{9}$

b) $100x - x = 27$, så $x = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$

c) $1000x - x = 123$, så $x = \frac{123}{999} = \frac{41}{333}$

**1.7**

a) $10x - x = 25{,}55\ldots - 2{,}55\ldots = 23$, så $x = \frac{23}{9}$

b) $100x - x = 81$, så $x = \frac{81}{99} = \frac{9}{11}$

**1.8**

a) Endelig: 0,25

b) Periodisk: $0{,}1\overline{6}$

c) Endelig: 0,12

d) Periodisk: $0{,}41\overline{6}$

**1.9**

a) Irrasjonalt, 12 er ikke et kvadrattall

b) Rasjonalt, $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

c) Rasjonalt, periodisk: $0{,}\overline{12} = \frac{4}{33}$

d) Irrasjonalt, uendelig og ikke periodisk

e) Irrasjonalt

**1.10**

a) $[1, 6]$

b) $\langle -3, 0\rangle$

c) $\langle \leftarrow, 5\rangle$

d) $[-2, \rightarrow\rangle$

**1.11**

a) $2 < x \leqslant 7$

b) $-4 \leqslant x < 1$

c) $x \leqslant 0$

**1.12**

a) Fylt prikk på $-2$, åpen prikk på 3, strek mellom.

b) Åpen prikk på 1, strek mot høyre uten slutt.

**1.13**

a) 5

b) 3

c) 10

**1.14**

$2 < \sqrt{5} < 3$ og $3 < \sqrt{10} < 4$. De hele tallene er $-2, -1, 0, 1, 2, 3$.

**1.15**

For eksempel $\frac{3}{2}$ (rasjonalt) og $\sqrt{2}$ eller $\sqrt{3}$ (irrasjonalt). Det finnes uendelig mange av begge.

**1.16**

Utskriften er 3 (tallene $-1$, 0 og 1). Programmet sjekker intervallet $[-1, 2\rangle$.

**1.17**

Perioden har 6 sifre. $20 = 3 \cdot 6 + 2$, så plass 20 har samme siffer som plass 2, altså 4.

**1.18**

$100x = 23{,}33\ldots$ og $10x = 2{,}33\ldots$, så $90x = 21$ og $x = \frac{21}{90} = \frac{7}{30}$.

**1.19**

$\frac{1}{2} = 0{,}5$, $\frac{1}{4} = 0{,}25$, $\frac{1}{5} = 0{,}2$ og $\frac{1}{8} = 0{,}125$ er endelige. $\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$, $\frac{1}{6} = 0{,}1\overline{6}$ og $\frac{1}{12} = 0{,}08\overline{3}$ er periodiske.

Påstand: En forkortet brøk gir et endelig desimaltall når nevneren bare har faktorene 2 og 5, fordi den da kan utvides til en nevner 10, 100, 1000, ...

**1.20**

Nei. Moteksempel: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$, som er rasjonalt.

## 1.2.1 Tallmønstre og figurtall

**1.21**

a) 23, 28

b) 32, 26

c) 15, 21

d) 16, 32

**1.22**

a) $a_n = 3n + 1$

b) $a_n = 5n - 4$

c) $a_n = 11 - 2n$

d) $a_n = 4n - 7$

**1.23**

a) 3, 8, 13

b) $a_{40} = 198$

c) $5n - 2 = 98$ gir $n = 20$, altså $a_{20}$.

**1.24**

a) $a_n = 7n - 5$, så $a_{20} = 135$.

b) Ja, $7n - 5 = 100$ gir $n = 15$.

c) Nei, $7n - 5 = 200$ gir $n = \frac{205}{7}$, som ikke er et naturlig tall.

**1.25**

a) $\frac{8 \cdot 9}{2} = 36$

b) $\frac{15 \cdot 16}{2} = 120$

c) $\frac{50 \cdot 51}{2} = 1275$

**1.26**

$T_{40} = \frac{40 \cdot 41}{2} = 820$

**1.27**

$\frac{n(n+1)}{2} = 78$ gir $n(n+1) = 156 = 12 \cdot 13$, så $n = 12$.

**1.28**

Det er de 10 første oddetallene, så summen er $10^2 = 100$.

**1.29**
a) $3 + 14 \cdot 2 = 31$
b) $a_n = 2n + 1$
c) $2n + 1 = 51$ gir $n = 25$ trekanter.

**1.30**
a) 36
b) $4n - 4$. Det er $n$ prikker på hver av de fire sidene, men hjørnene er talt to ganger.

**1.31**
a) $6 \cdot 7 = 42$
b) $n(n+1)$
c) Tallene er dobbelt så store som trekanttallene: $n(n+1) = 2T_n$.

**1.32**
Formelen gir $a_1 = 8$, ikke 5. Riktig er $a_n = 5 + (n-1) \cdot 3 = 3n + 2$.

**1.33**
a) 11, 13 og 17, alle primtall.
b) $n = 11$ gir $121 - 11 + 11 = 121 = 11 \cdot 11$, som ikke er et primtall.

**1.34**
For eksempel $3 \cdot 5 = 15$, $7 \cdot 9 = 63$ og $1 \cdot 11 = 11$. Påstanden er sann, men eksemplene er ikke et bevis. Det beviser vi i 1.6.

**1.35**
Utskriften er `1`, `4`, `9` og `16` på hver sin linje. Programmet legger sammen oddetallene $1, 3, 5, 7$, og summene er kvadrattall.

**1.36**
Utskriften er `3`, `7`, `11`, `15` og `19`. Formelen er $a_n = 4n - 1$.

**1.37**
$5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ kamper.

**1.38**
$2 + 4 + \cdots + 100 = 2(1 + 2 + \cdots + 50) = 2 \cdot T_{50} = 2 \cdot 1275 = 2550$.

**1.39**
a) $9, 25, 49, 81$. Alle er kvadrattall av oddetall.
b) Påstand: $8T_n + 1 = (2n+1)^2$.
Bevis: $8 \cdot \dfrac{n(n+1)}{2} + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$.

**1.40**
$3 \cdot 3$: $9 + 4 + 1 = 14$ kvadrater. $4 \cdot 4$: $16 + 9 + 4 + 1 = 30$ kvadrater.
Antallet er summen av kvadrattallene: $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

### 1.3.1 Algoritmisk tenkning

**1.41**
7

**1.42**
`1`, `2`, `3` og `4` på hver sin linje.

**1.43**
a) 4 ganger $(5, 6, 7, 8)$
b) $0, 2, 4, 6, 8$

**1.44**
a) 5
b) 3
c) 0

**1.45**
`s` blir $1, 5, 14, 30$. Utskriften er `30`.

**1.46**
`p` blir $1, 2, 6, 24, 120$. Utskriften er `120` $= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$.

**1.47**
$12 \to 6 \to 3 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$: 9 steg.

**1.48**
`n` blir $50, 25, 12, 6, 3, 1$. Utskriften er `6`.

**1.49**
`oddetall`, siden `7 % 2` er 1.

**1.50**
`summ = 0` står inne i løkka, så summen settes til null i hver runde. Linja må stå før løkka. Da blir utskriften `45`.

**1.51**
Programmet teller hvor mange tall i lista som er større enn 5. Utskriften er `2`.

**1.52**
Linja `print(5 * i)` endres til `print(7 * i)`.

**1.53**
`10`. Programmet regner ut tverrsummen $2 + 0 + 2 + 6$.

**1.54**
1. Sett «minst» lik det første tallet.
2. Gå gjennom tallene ett for ett. Hvis tallet er mindre enn «minst», sett «minst» lik tallet.
3. Når alle tallene er sjekket, er svaret «minst».

**1.55**
Gjett tallet i midten av de mulige tallene, og fjern halvparten etter hvert svar. Etter $k$ gjett er det høyst $\dfrac{100}{2^k}$ muligheter igjen. Siden $2^7 = 128 > 100$, trenger du høyst 7 gjett.

### 1.3.2 Algoritmer i matematikken

**1.56**
23, 29, 31 og 37

**1.57**
a) Nei, $143 = 11 \cdot 13$.
b) Ja. $12^2 = 144 < 149 < 169 = 13^2$, og verken 2, 3, 5, 7 eller 11 går opp.

**1.58**
15:
$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47$.

**1.59**
a) $2^2 \cdot 3 \cdot 7$
b) $2 \cdot 3 \cdot 5^2$
c) $2^8$
d) $7 \cdot 11 \cdot 13$

**1.60**
a) 12
b) 7
c) 1

**1.61**
a) $252 = 1 \cdot 198 + 54$, $198 = 3 \cdot 54 + 36$, $54 = 1 \cdot 36 + 18$, $36 = 2 \cdot 18 + 0$. SFF $= 18$.
b) $\dfrac{198 : 18}{252 : 18} = \dfrac{11}{14}$

**1.62**
`2`, `2`, `3` og `7` på hver sin linje, altså $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$.

**1.63**
`7`, siden $119 = 7 \cdot 17$ og ingen av tallene 2 til 6 går opp.

**1.64**
$(a, b) = (105, 45) \to (45, 15) \to (15, 0)$. Utskriften er `15`.

**1.65**
7 og 8

**1.66**
$x = 1, 2, 3, 4$. ($x = 4$ gir 20, og $x = 5$ gir 30, som ikke er mindre enn 30.)

**1.67**
5: $1 \cdot 48$, $2 \cdot 24$, $3 \cdot 16$, $4 \cdot 12$ og $6 \cdot 8$.

**1.68**
SFF$(72, 54) = 18$ kurver, med 4 epler og 3 pærer i hver.

**1.69**
Hvis $n = a \cdot b$ og begge faktorene er større enn $\sqrt{n}$, blir $a \cdot b > n$. Altså er den minste faktoren høyst $\sqrt{n}$, og vi finner den hvis vi prøver opp til $\sqrt{n}$.

### 1.4.1 Potensregler

**1.70**
a) $3^9$
b) $7^5$
c) $2^{12}$
d) $5^3$

**1.71**
a) 1
b) $\dfrac{1}{9}$
c) $\dfrac{1}{2}$
d) $\dfrac{9}{4}$

**1.72**

a) $a^7$

b) $x^6$

c) $9x^2$

d) $a^{12}$

**1.73**

a) $8a^6b^3$

b) $\dfrac{a^2}{b}$

c) $\dfrac{1}{x^6}$

d) $\dfrac{x^6y^{-4}}{x^4y^{-3}} = x^2y^{-1} = \dfrac{x^2}{y}$

**1.74**

a) $2^6 \cdot 2^{-4} = 2^2 = 4$

b) $\dfrac{3^4}{3^3} = 3$

c) $10^{-2} = 0{,}01$

**1.75**

a) $x = 4$

b) $x = -3$

c) $x = \dfrac{1}{2}$

**1.76**

Reglene gjelder bare for samme grunntall. Riktig er $2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72$, mens $6^5 = 7776$.

**1.77**

$(1+2)^2 = 9$, men $1^2 + 2^2 = 5$.

**1.78**

1, 3, 9 og 27 på hver sin linje.

**1.79**

$1000 \cdot 2^5 = 32\,000$

**1.80**

$2^{n+n+1-2n} = 2^1 = 2$

**1.81**

$2^{40} = \left(2^8\right)^5 = 256^5$ og $3^{25} = \left(3^5\right)^5 = 243^5$. Altså er $2^{40}$ størst.

**1.82**

$2^{30} = \left(2^{10}\right)^3 \approx \left(10^3\right)^3 = 10^9$

**1.83**

$\dfrac{a^2}{a^3} = a^{2-3} = a^{-1}$. Men vi kan også forkorte: $\dfrac{a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = \dfrac{1}{a}$. Altså må $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$.

**1.84**

$\dfrac{8x^3 \cdot x^{-1}}{4x^2} = 2x^{3-1-2} = 2x^0 = 2$

### 1.4.2 Røtter og potenser med brøk som eksponent

**1.85**

a) 8

b) 5

c) $-3$

d) 2

**1.86**

a) $3\sqrt{2}$

b) $4\sqrt{3}$

c) $10\sqrt{2}$

d) $3\sqrt{5}$

**1.87**

a) $\sqrt{36} = 6$

b) $\sqrt{64} = 8$

c) $\sqrt{25} = 5$

**1.88**

a) $2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

b) $5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

c) $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$

**1.89**

a) 5

b) 2

c) $\left(\sqrt[4]{16}\right)^3 = 2^3 = 8$

d) $\dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{8}\right)^2} = \dfrac{1}{4}$

**1.90**

a) $x^{1/2}$

b) $x^{5/3}$

c) $x^{3/2}$

d) $x^{-1/3}$

**1.91**

a) $3\sqrt{5}$

b) $2\sqrt{2}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

**1.92**

Venstre side er $4 + 3 = 7$, men $\sqrt{25} = 5$. Røtter kan ikke legges sammen ved å legge sammen tallene under rottegnet.

**1.93**

Nei. $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$, ikke $-3$. Kvadratroten er aldri negativ.

**1.94**

a) $\sqrt[3]{27} = 3$ dm

b) $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ cm

**1.95**

a) $2 \cdot 2 = 4$

b) $3 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 = 2$

**1.96**

$\sqrt{8} < 3 < \sqrt[3]{30}$, siden $\left(\sqrt{8}\right)^2 = 8 < 9 = 3^2$ og $3^3 = 27 < 30$.

**1.97**

3.0 og 4.0, altså $\sqrt[3]{27}$ og $\sqrt{16}$.

**1.98**

$\left(x^{5/6}\right)^6 = x^5$

**1.99**

$\left(9^{1/2}\right)^2 = 9^1 = 9$. Altså er $9^{1/2}$ et positivt tall som opphøyd i andre blir 9, og det er $\sqrt{9} = 3$.

### 1.5.1 Standardform og prefikser

**1.100**

a) $3{,}8 \cdot 10^5$

b) $7{,}2 \cdot 10^{-3}$

c) $6 \cdot 10^9$

d) $4{,}1 \cdot 10^{-7}$

**1.101**

a) 2500

b) 0,0004

c) 901 000

**1.102**

a) Nei, $1{,}2 \cdot 10^4$

b) Nei, $5 \cdot 10^3$

c) Ja

**1.103**

a) $6 \cdot 10^9$

b) $8 \cdot 10^4$

c) $4 \cdot 10^4$

d) $3 \cdot 10^3$

**1.104**

a) $20 \cdot 10^9 = 2 \cdot 10^{10}$

b) $0{,}3 \cdot 10^3 = 3 \cdot 10^2$

**1.105**

a) $9 \cdot 10^8$

b) $8 \cdot 10^{-9}$

**1.106**

a) $50 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^5 = 5{,}3 \cdot 10^6$

b) $60 \cdot 10^{-4} - 4 \cdot 10^{-4} = 5{,}6 \cdot 10^{-3}$

**1.107**

a) $4{,}7 \cdot 10^6$ W

b) $3{,}5 \cdot 10^{-5}$ g

c) $2 \cdot 10^{12}$ byte

d) $8 \cdot 10^{-10}$ s

**1.108**

$3 \text{ km} = 3 \cdot 10^3 \text{ m} = 3 \cdot 10^6 \text{ mm}$

**1.109**

$4 \cdot 10^{-5} < 3{,}2 \cdot 10^{-4} < 2{,}9 \cdot 10^{-3}$

**1.110**

$3 \cdot 10^8 \cdot 3 \cdot 10^7 = 9 \cdot 10^{15}$ m

**1.111**
$5 \cdot 10^6$ mm$^3 \cdot 5 \cdot 10^6 = 25 \cdot 10^{12} = 2{,}5 \cdot 10^{13}$

**1.112**
$\frac{4 \cdot 10^{-1}}{9 \cdot 10^4} \approx 0{,}44 \cdot 10^{-5} \approx 4 \cdot 10^{-6}$ mm, altså omtrent 4 nm per sekund.

**1.113**
200000000.0, altså $2 \cdot 10^8$.

**1.114**
$6 \cdot 10^{-8} = 0{,}000\,000\,06$

### 1.6.1 Direkte bevis

**1.115**
a) Partall
b) Oddetall
c) Oddetall
d) Partall

**1.116**
a) Sann
b) Usann, $x = -3$
c) Sann
d) Usann, $x = -1$

**1.117**
a) $\Leftrightarrow$
b) $\Rightarrow$ (den omvendte er usann, siden $x = -1$ også gir $x^2 = 1$)

**1.118**
$2a + 2b = 2(a + b)$, som er et partall.

**1.119**
$2a \cdot b = 2(ab)$, som er et partall.

**1.120**
$(2a + 1) + (2b + 1) + (2c + 1) = 2(a + b + c + 1) + 1$, som er et oddetall.

**1.121**
$(2a + 1) - (2b + 1) = 2a - 2b = 2(a - b)$, som er et partall.

**1.122**
$(2k)^2 = 4k^2$, som er delelig med 4.

**1.123**
Det er bare to eksempler. Et bevis må gjelde alle oddetall, for eksempel ved å skrive dem som $2a + 1$ og $2b + 1$.

**1.124**
$(n^2 + 2n + 1) - (n^2 - 2n + 1) = 4n$, som er delelig med 4.

**1.125**
a) $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 4n + 6 = 2(2n + 3)$, et partall.
b) Nei. $4n + 6 = 4(n + 1) + 2$ gir alltid rest 2 ved deling på 4. For eksempel er $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

**1.126**
$n^2 - n = (n - 1)n$, produktet av to hele tall som følger etter hverandre. Ett av dem er et partall, så produktet er et partall.

**1.127**
$n = 6k = 3 \cdot 2k$, som er delelig med 3.

**1.128**
$n + 2n = 3n$, som er delelig med 3.

**1.129**
$(10a + b) - (10b + a) = 9a - 9b = 9(a - b)$, som er delelig med 9.

### 1.6.2 Moteksempel og indirekte bevis

**1.130**
a) $9 = 3 \cdot 3$
b) $n = 3$ gir 9.
c) $a = -3$ og $b = -1$: $a < b$, men $\frac{a}{b} = 3$.

**1.131**
a) Minst én bil på parkeringsplassen er ikke rød.
b) Minst én elev kom for sent.
c) Alle primtall er mindre enn eller lik 100.

**1.132**
12, som er delelig med 4, men ikke med 8. (16 er delelig med begge, så det stemmer med påstanden.)

**1.133**
Anta at $n = 2k$ er et partall. Da er $3n + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1)$, et partall. Det motsier at $3n + 2$ er et oddetall. Altså er $n$ et oddetall.

**1.134**
Anta at det finnes slike tall. Venstre side er $2(2a + 3b)$, et partall, mens 9 er et oddetall. Det er en motsigelse.

**1.135**
Anta at $\sqrt{5} = \frac{p}{q}$, forkortet så mye som mulig. Da er $p^2 = 5q^2$, så $p$ er delelig med 5, $p = 5m$. Da er $25m^2 = 5q^2$, altså $q^2 = 5m^2$, og $q$ er delelig med 5. Både $p$ og $q$ er delelige med 5, som motsier at brøken er forkortet. Altså er $\sqrt{5}$ irrasjonalt.

**1.136**
Anta at $r$ er det minste positive rasjonale tallet. Da er $\frac{r}{2}$ også et positivt rasjonalt tall, og $\frac{r}{2} < r$. Det er en motsigelse.

**1.137**
Anta at minst ett av tallene, for eksempel $a = 2k$, er et partall. Da er $a \cdot b = 2kb$ et partall. Det motsier at $a \cdot b$ er et oddetall. Altså er begge oddetall.

**1.138**
Anta at $1 + \sqrt{2} = r$ er rasjonalt. Da er $\sqrt{2} = r - 1$ også rasjonalt, siden differansen av to rasjonale tall er rasjonal. Det motsier at $\sqrt{2}$ er irrasjonalt.

**1.139**
$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Anta at $\sqrt{8} = r$ er rasjonalt. Da er $\sqrt{2} = \frac{r}{2}$ rasjonalt, som er en motsigelse.

**1.140**
a) Usann, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$.
b) Usann, $\sqrt{4} = 2$.
c) Sann. Er $2k$ et partall, er $2k + 2$ et større partall.

**1.141**
$n = 16$ gir $256 + 16 + 17 = 289 = 17^2$. (Også $n = 17$ gir $17 \cdot 19$.)

**1.142**
14 6, 15 2 og 16 0. For $n = 16$ er tallet delelig med 17, så det er ikke et primtall. Påstanden er usann.

**1.143**
Vi kan bare se endelig mange desimaler. Perioden i et rasjonalt tall kan være svært lang, så at vi ikke ser et mønster, beviser ingenting. Et bevis må vise at $\sqrt{2}$ ikke kan skrives som en brøk.

**1.144**
N trenger ikke være et primtall selv (30 031 er det ikke). Men primfaktorene i N (59 og 509) er alltid nye primtall som ikke er med i lista. Det er det beviset bruker.